Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. November 2025

Logik in der Informatik

Wintersemester 2025/2026

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 8. Dezember 2025, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 7 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

Im Online-Rollenspiel *Village of Voidcraft* kann sich jeder Spieler einer Plündergilde anschließen; in der Rangliste der 100 besten Spieler wird dann zu jedem Spieler auch die entsprechende Gilde angezeigt. Für diese Aufgabe beschränken wir uns auf die drei Gilden *Punktegeier*, *Kistenklopper* und *RaidenStattStudieren*.

Sei $\sigma := \{ P, K, R, \mathit{Vorg}, \mathit{erster} \}$ eine Signatur, wobei P, K, R 1-stellige Relationssymbole sind, *Vorg* ein 1-stelliges Funktionssymbol und *erster* ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{ 1, 2, \ldots, 100 \}$ und $\mathit{erster}^{\mathcal{A}} = 1$, sodass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in P^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Punktegeier;
- $a \in K^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Kistenklopper;
- $a \in R^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde RaidenStattStudieren;
- $\mathit{Vorg}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 1, \\ a-1, & \text{falls } a \in \{ 2, \ldots, 100 \}. \end{cases}$

(a) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\exists x \exists y \exists z \Big(\big(K(y) \land P(x) \big) \land R(z) \Big)$

(ii) $\exists x \Big(P(x) \land \neg \exists y \; x = \mathit{Vorg}(y) \Big)$

(iii) $\forall x \Big((R(x) \land \neg \; \mathit{erster} = x) \to K(\, \mathit{Vorg}(x)) \Big)$

(b) Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

(i) Auf Platz 1 der Rangliste ist ein Mitglied der Punktegeier.

(ii) Falls ein Spieler von Kistenklopper auf Platz 1 der Rangliste ist, dann stehen auf allen Plätzen der Rangliste Spieler von Kistenklopper.

(iii) Auf der Rangliste stehen mindestens zwei Mitglieder von RaidenStattStudieren.

(iv) Unmittelbar hinter jedem Mitglied von Kistenklopper steht eines von Punktegeier oder RaidenStattStudieren.

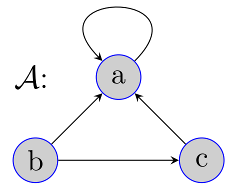
— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus dem zweistelligen Relationssymbol E besteht.

(i) Geben Sie die σ-Struktur $\mathcal{A}$ an, die durch den Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird.

$\mathcal{A}$:



(ii) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ an, der $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt, d. h. es soll für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten:

$$\mathcal{B} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$

Erläutern Sie Ihren $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ.

(iii) Geben Sie für die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi(x) \;:=\; \forall y\, \exists z \Big(\big(\neg\, y = z \;\wedge\; E(y,z) \big) \;\wedge\; \big(E(z,x) \rightarrow E(x,y) \big) \Big)$$

eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ an, deren Universum aus höchstens vier Elementen besteht, sowie zwei Belegungen β_1 und β_2 in $\mathcal{A}$, so dass für die Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}, \beta_2)$ gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$.
Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ gilt!

(b) Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{\, a, b, c \,\}$.
Definition: Ein $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

(i) Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz ψ?

$$\psi \;:=\; \forall x \Big(P_b(x) \;\rightarrow\; \exists y \Big(P_c(y) \;\wedge\; x \le y \;\wedge\; \forall z (z \le x \;\vee\; y \le z) \Big) \Big)$$

Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangssprachlich angeben.

(ii) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(b\, a^*\, c)^*$ definierte Sprache beschreibt und begründen Sie, warum Ihr $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz das Gewünschte leistet.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 9 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.
Die Kapitel 7 und 8 werden erst am Ende des Semesters bearbeitet.

(a) Auf der Website zur Prolog-Übung finden Sie die Datei `al.pl`. Speichern Sie die Datei in einem Verzeichnis Ihrer Wahl.

Machen Sie sich mit den in dieser Datei definierten Operatoren und Prädikaten vertraut. Beachten Sie insbesondere die durch das Prädikat `al/1` definierte Repräsentation aussagenlogischer Formeln.

Erstellen Sie im selben Verzeichnis eine neue Datei `blatt7.pl`, die mit der Zeile

```
:- ensure_loaded([al]).
```

beginnt.

Anmerkung: Diese Zeile lädt die Operatoren und Prädikate aus `al.pl`, sodass sie von Ihnen in den folgenden Teilaufgaben benutzt werden können.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

(b) Schreiben Sie (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `as_in_al/2`, sodass das Ziel `as_in_al(F, X)` genau dann erfüllt ist, wenn `F` eine aussagenlogische Formel repräsentiert und `X` ein Aussagensymbol, das in `F` vorkommt.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- as_in_al(~(c => (a /\ ~ b)), X).
```

zu den Antworten `X = c; X = a; X = b; false.` führen.

(c) Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 2.37 des Vorlesungsskripts, um (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `al2nnf/3` zu schreiben, sodass die Anfrage

```
?- al2nnf(F, P, N).
```

genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- `F` repräsentiert eine aussagenlogische Formel φ,
- `P` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu φ äquivalente aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und
- `N` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu $\neg\varphi$ äquivalente aussagenlogische Formel in Negationsnormalform.

Hinweis: Erweitern Sie dazu den Beweis von Satz 2.37 um den Fall aussagenlogischer Formeln der Form $(\psi_1 \to \psi_2)$.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- al2nnf(~(c => (a /\ ~ b)), P, N).
```

zu der Antwort

```
P = c/\ (~a\/b), N = ~c\/ (a/\ ~b)
```

führen.

Hinweise: Es macht nichts, wenn Prolog die gesuchten aussagenlogischen Formeln über das Backtracking mehrfach ausgibt. Beachten Sie zudem, dass die unschöne Formatierung der Leerzeichen in der Ausgabe aussagenlogischer Formeln nicht zu vermeiden ist und insbesondere keinen Fehler Ihres Prädikats darstellt.