

Logik in der Informatik

Wintersemester 2025/2026

Übungsblatt 5

Abgabe: bis 24. November 2025, 13.⁰⁰ Uhr

Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 5 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

- (a) Beweisen Sie per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt: $\Gamma \vdash_R \delta \implies \Gamma \models \delta$.
- (b) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil (a), d. h. gilt für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ : $\Gamma \models \delta \implies \Gamma \vdash_R \delta$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.
- (c) Im Folgenden geben wir Ihnen eine allgemeine Beschreibung des ersten Schritts des Tseitin-Verfahrens für Formeln aus $\mathbf{AL}(\tau)$ für $\tau := \{\neg, \wedge\}$ an.

Dafür benötigen wir zunächst die folgenden Notationen:

- $\text{Lit} := \mathbf{AS} \cup \{\neg X : X \in \mathbf{AS}\}$ ist die Menge aller Literale.
- Zu jeder Formel $\varphi \in \mathbf{AL}(\tau)$ definieren wir die Menge $\text{sub}(\varphi) \subseteq \mathbf{AL}(\tau)$ rekursiv wie folgt:

Rekursionsanfang: Für alle $X \in \mathbf{AS}$ sei $\text{sub}(X) := \{X\}$.

Rekursionsschritt: Für alle $\varphi, \psi \in \mathbf{AL}(\tau)$ sei

- $\text{sub}(\neg\varphi) := \text{sub}(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$ und
- $\text{sub}((\varphi \wedge \psi)) := \text{sub}(\varphi) \cup \text{sub}(\psi) \cup \{(\varphi \wedge \psi)\}$.

Sei nun $\varphi \in \mathbf{AL}(\tau) \setminus \text{Lit}$ eine beliebige Formel, die nicht in KNF ist und die wir für den Rest dieser Aufgabe festhalten. Ebenso sei $f : \text{sub}(\varphi) \rightarrow \mathbf{AS} \setminus \text{as}(\varphi)$ eine feste injektive Abbildung, wobei $\text{as}(\varphi)$ die Menge aller Aussagensymbole ist, die in φ vorkommen.

Wir definieren den Repräsentanten $\text{rep}(\psi)$ von ψ für jede Formel $\psi \in \text{sub}(\varphi) \setminus \text{Lit}$ als $\text{rep}(\psi) := X_\psi := f(\psi)$ und für jedes Literal $\lambda \in \text{sub}(\varphi) \cap \text{Lit}$ als $\text{rep}(\lambda) := \lambda$.

Für alle $\psi \in \text{sub}(\varphi) \setminus \text{Lit}$ definieren wir die Formel $\text{form}(\psi) \in \mathbf{AL}$ wie folgt:

- Falls ψ von der Form $\neg\psi'$ für ein $\psi' \in \mathbf{AL}(\tau)$ ist, so sei $\text{form}(\psi) := (X_\psi \leftrightarrow \neg \text{rep}(\psi'))$.
- Falls ψ von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{AL}(\tau)$ ist, so sei $\text{form}(\psi) := (X_\psi \leftrightarrow (\text{rep}(\psi_1) \wedge \text{rep}(\psi_2)))$.

Wir setzen:

$$\varphi' := \left(X_\varphi \wedge \bigwedge_{\psi \in \text{sub}(\varphi) \setminus \text{Lit}} \text{form}(\psi) \right).$$

(i) Geben Sie $\text{sub}(\varphi)$ und φ' für die Formel $\varphi := (\neg(A_1 \wedge A_2) \wedge \neg A_3)$ an.

In den folgenden Teilaufgaben sei φ eine beliebige Formel in $\text{AL}(\tau)$, die nicht in KNF ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle Interpretationen \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \models \varphi'$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$.

(iii) Für jede Interpretation \mathcal{I} sei \mathcal{I}' die Interpretation mit $\mathcal{I}'(Y) = \mathcal{I}(Y)$ für alle $Y \in \text{as}(\varphi)$ und $\mathcal{I}'(X_\psi) = \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ für alle $\psi \in \text{sub}(\varphi) \setminus \text{Lit}$.

i. Zeigen Sie, dass für alle $\psi \in \text{sub}(\varphi) \setminus \text{Lit}$ gilt: $\mathcal{I}' \models \text{form}(\psi)$.

ii. Zeigen Sie, dass für alle Interpretationen \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt: $\mathcal{I}' \models \varphi'$.

Beachten Sie, dass aus (ii) und (iii) folgt, dass φ und φ' erfüllbarkeitsäquivalent sind.

Aufgabe 3:

(40 Punkte)

(a) Im Folgenden betrachten wir einen *Baum* \mathcal{B} mit der *abzählbar unendlichen Knotenmenge* $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von \mathcal{B} ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von \mathcal{B} repräsentieren wir durch eine Funktion **Kinder**, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge **Kinder**(v) all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass \mathcal{B} *endlich verzweigend* ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge **Kinder**(v) endlich ist.

(i) Ein *Pfad* in \mathcal{B} ist eine (endliche oder unendliche) Folge (v_0, v_1, v_2, \dots) von Knoten aus V , sodass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von \mathcal{B} , und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \text{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ *repräsentiert einen Pfad* $P = (v_0, v_1, v_2, \dots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \text{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \iff v \in \{v_0, v_1, v_2, \dots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage „*der Knoten v gehört zum Pfad P* “.

Geben Sie eine unendliche Formelmeng Φ an, sodass für jede Interpretation \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

(ii) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ hat die Länge n . Wir sagen, dass der Baum \mathcal{B} *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn \mathcal{B} für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält.

Zeigen Sie mithilfe des *Endlichkeitssatzes* folgendes Lemma von Dénes König:

Königs Lemma (1927 bzw. 1936). *Wenn \mathcal{B} Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält \mathcal{B} einen Pfad unendlicher Länge.*

(b) Stellen Sie für die Klauselmeng Γ_1

$$\Gamma_1 := \left\{ \{R, S\}, \{\neg R, S, T\}, \{\neg S, \neg T\}, \{R, \neg T\}, \{T, \neg S, \neg R, U\}, \{\neg S, \neg U\} \right\},$$

wobei R, S, T, U unterschiedliche Aussagensymbole aus AS sind, eine aussagenlogische Formel φ_1 in KNF auf, sodass für jede Interpretation \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \iff \mathcal{I} \models \Gamma_1.$$

(c) Sei Γ_1 die Klauselmeng aus Aufgabenteil (b) und sei

$$\Gamma_2 := \left\{ \{Q, R, S\}, \{Q, \neg R\}, \{Q, R, \neg S\}, \{R, \neg Q\}, \{\neg R, \neg Q\} \right\},$$

wobei Q, R, S unterschiedliche Aussagensymbole aus AS sind. Geben Sie für jede der beiden Klauselmengen jeweils ein Modell oder eine Resolutionswiderlegung an. Bei einer Resolutionswiderlegung gehen Sie analog zu Beispiel 2.58 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!

- (a) Wir kodieren aussagenlogische Literale wie folgt durch Prolog-Terme: Ist $i \in \mathbb{N}$, dann repräsentiert `pos(i)` das Literal A_i und `neg(i)` das Literal $\neg A_i$. Weiterhin kodieren wir Mengen von Literalen als Prolog-Listen. Beispielsweise repräsentieren wir $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ durch `[pos(1), neg(2), neg(3)]`.

Schreiben Sie ein Prädikat `resolvente/3`, so dass Folgendes gilt: Unter der Annahme, dass L1, L2 und R Mengen von Literalen repräsentieren, ist `resolvente(L1, L2, R)` genau dann erfüllt, wenn R eine Resolvente von L1 und L2 ist. Beispielsweise sollte die Anfrage `?- resolvente([pos(1), neg(3), pos(4)], [pos(2), pos(3), neg(4)], R)`.

zu folgenden Ausgaben führen:

R = `[pos(1), pos(4), pos(2), neg(4)]` und R = `[pos(1), neg(3), pos(2), pos(3)]`

Hinweise: Nutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `nimm/3` aus Blatt 4 Teilaufgabe 4(c); haben Sie diese Aufgabe nicht gelöst, so können Sie die Online-Hilfe von SWI-Prolog nutzen, um sich mit dem vordefinierten Prädikat `select/3` vertraut zu machen. Nutzen Sie außerdem das vordefinierte Prädikat `union/3`.

- (b) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben Z, W, E, I, V, R, S, C, H die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise den Buchstaben V, I, E, R die Ziffern 8, 7, 1, 4 zu, so entspricht VIER der Dezimalzahl 8714.

$$\begin{array}{r} \text{Z W E I} \\ + \text{V I E R} \\ \hline = \text{S E C H S} \end{array}$$

Definition:

Eine Zuordnung der Ziffern aus $\{0, \dots, 9\}$ zu den Buchstaben Z, W, E, I, V, R, S, C, H ist eine Lösung für das Rätsel, wenn

- die Gleichung $\text{ZWEI} + \text{VIER} = \text{SECHS}$ erfüllt ist,
- es keine zwei verschiedene Buchstaben aus $\{Z, W, E, I, V, R, S, C, H\}$ gibt, denen die gleiche Ziffer zugeordnet ist, und
- die Zahlen aus der Gleichung keine führenden Nullen besitzen (d. h. weder Z noch V noch S darf die Ziffer 0 zugeordnet werden).

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/9`, so dass

`raetsel(Z, W, E, I, V, R, S, C, H)`

genau dann erfüllt ist, wenn Z, W, E, I, V, R, S, C, H eine Lösung für das Rätsel ist!

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \dots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.

Achtung: Falls die Berechnung aller Lösungen auf `gruenau6` mehr als 10 Sekunden benötigt, werden Sie mit Ihrer Abgabe nicht die volle Punktzahl erreichen.