Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. November 2025

Logik in der Informatik

Wintersemester 2025/2026

Übungsblatt 4

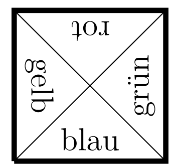
Abgabe: *bis 17. November 2025, 13.^{00} Uhr*

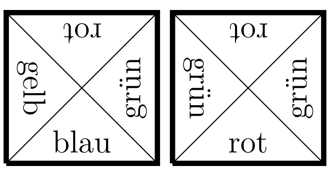
Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 4 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Eine Kachel ist ein Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten (vgl. Beispielabbildung rechts). Alle Kacheln eines Kacheltyps t besitzen dieselbe Färbung ihrer Kanten. Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Seien H und V zwei Relationen auf K, die für zwei Kacheltypen t_1, t_2 besagen, dass t_1 und t_2 in dieser Reihenfolge horizontal bzw. vertikal zueinander passen, also die sich berührenden Kanten von derselben Farbe sind.





$(\ t_1\ ,\ \ t_2\ ) \in H$

Das heißt, für $t_1, t_2 \in K$ gilt:

$(t_1, t_2) \in H$ genau dann, wenn t_2 rechts neben t_1 passt

und analog

$(t_1, t_2) \in V$ genau dann, wenn t_2 über t_1 passt.

Eine (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene (für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist eine Funktion $k : \{1, \ldots, n\}^2 \to K$, die H und V respektiert, d. h. für alle $i \in \{\,1, \ldots, n-1\,\}$ und alle $j \in \{\,1, \ldots, n\,\}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Eine (K, H, V)-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene ist eine Funktion $k : \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \to K$, die H und V respektiert, d. h. für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Benutzen Sie für die Lösung der Aufgabe Aussagensymbole der Form $A^t_{i,j}$ für $t \in K, i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Bedeutung, dass Feld (i, j) mit einer Kachel vom Typ t gekachelt wird.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie eine endliche Menge Γ_n von aussagenlogischen Formeln, so dass gilt:

> Jedes Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n entspricht einer (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene und jede (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene entspricht einem Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n. Begründen Sie die Wahl Ihrer Formelmenge Γ_n.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

(b) Zeigen Sie das folgende Theorem:

> Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen und seien H und V zwei 2-stellige Relationen auf K (d. h. $H, V \subseteq K \times K$). Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene gibt, dann gibt es auch eine (K, H, V)-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei φ_n die in Satz 2.45 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

(i) Bestimmen Sie alle Interpretationen $\mathcal{I}$, für die gilt:

- $\mathcal{I}$ erfüllt φ_n und
- für jedes $i \in \{ 1, \ldots, n \}$ existiert eine Interpretation, die sich von $\mathcal{I}$ nur dadurch unterscheidet, dass sie *genau* eines der beiden Aussagensymbole X_i, Y_i auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als $\mathcal{I}$, und die φ_n *nicht* erfüllt.

(ii) Beweisen Sie Satz 2.45 der Vorlesung.
Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist, einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht, d. h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$, sodass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil **(i)**, dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$ von mindestens zwei essenziell verschiedenen Interpretationen $\mathcal{I}$ aus **(i)** erfüllt wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(iii) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ DNF-Formeln φ'_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, sodass jede zu φ'_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.52 die Formel

$$\varphi \ := \ \big(\neg(P \vee Q) \to (\neg S \wedge T)\big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Achtung: Halten Sie sich streng an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.52. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Teilformeln von φ erhalten aufsteigend Bezeichner der Form ψ_i, wobei $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
- Ausgenommen davon sind Aussagensymbole, negierte Aussagensymbole und φ selbst. Im Gegensatz dazu wird negierten Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, sehr wohl ein eigener Bezeichner zugeordnet.
- Der Index i entspricht der Position der Teilformeln in der Traversierung des Syntaxbaumes von φ nach der Preorder-Tiefensuche. Eine solche Traversierung listet zunächst die Wurzel des Baumes auf, dann die Traversierung des gesamten linken Teilbaumes (so dieser existiert), und dann die des gesamten rechten Teilbaumes (so dieser existiert).
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{ X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots \}$ zu wählen. Für jede Teilformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht oder nur teilweise korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können ggf. die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 4 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für die Aufgabenteile (a) und (b) handschriftlich an und reichen Sie diese bei Moodle als PDF-Datei ein. Die Lösung des Aufgabenteils (c) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise (siehe* `https://hu.berlin/prolog`*) für Prolog-Code in einem zusätzlichen Abgabefach in Moodle eingereicht werden!*

(a) Wie antwortet Prolog auf die folgenden Anfragen?

- **(i)** `?- [ a, b ] = [ X, Y ].`
- **(ii)** `?- [ X | []] = [c].`
- **(iii)** `?- [ [] | [ b, c ]] = [ X, _, Z ].`
- **(iv)** `?- [ H | T ] = [ a, b | [ c | [ d ]]].`

(b) Das Prädikat `member/2` wird in Abschnitt 4.2 des Buchs "Learn Prolog Now!" definiert. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- member(42, [42, ixs, X]).
```

(c) Definieren Sie *rekursiv* ein Prädikat `nimm/3`, so dass `nimm(E, X, Y)` genau dann erfolgreich ist, wenn `E` ein Element der Liste `X` ist und `Y` aus der Liste `X` durch Löschung eines Vorkommens von `E` entsteht. So sollte beispielsweise die Anfrage

```
?- nimm(E, [1, 2, 3], Y).
```

zu der folgenden Antworten führen:

```
E = 1,
Y = [2, 3] ;
E = 2,
Y = [1, 3] ;
E = 3,
Y = [1, 2] ;
false.
```