

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2025/2026

## Übungsblatt 3

**Abgabe:** bis 10. November 2025, 13.00 Uhr

### Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 3 auf der Moodle-Plattform.

### Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

- (a) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an, d. h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor  $\rightsquigarrow$ , sodass für alle  $\varphi, \psi \in \text{AL}$  und alle Interpretationen  $\mathcal{I}$  gilt:

$$\llbracket (\varphi \rightsquigarrow \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 - \llbracket (\varphi \rightarrow \psi) \rrbracket^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.27) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren und beweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Betrachten Sie die Einschränkung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems auf Formeln in DNF, d. h. die Eingabe besteht aus einer aussagenlogischen Formel  $\varphi$  in DNF und die Aufgabe ist, zu entscheiden, ob  $\varphi$  erfüllbar ist.

Finden Sie heraus, ob dieses Problem effizient gelöst werden kann. Falls „ja“, geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des Problems an; falls „nein“, weisen Sie nach, dass das Problem NP-hart ist.

### Aufgabe 3:

(40 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass für jede Formel  $\varphi \in \text{AL}$ , in der keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn  $\varphi$  unerfüllbar ist, dann ist  $\tilde{\varphi}$  allgemeingültig.

- (b) Geben Sie für jede der Mengen  $\tau_1 := \{\neg, \rightarrow\}$  und  $\tau_2 := \{\vee, \wedge, \mathbf{0}\}$  an, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.33) und beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- (c) Betrachten Sie die beiden Formeln

$$\begin{aligned} \varphi &:= ((\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_2) \wedge \neg A_4) \quad \text{und} \\ \psi &:= (A_3 \vee ((\neg A_2 \rightarrow (\neg A_0 \vee A_1)) \wedge A_4)). \end{aligned}$$

Wandeln Sie die Formel  $\varphi$  in eine äquivalente Formel  $\varphi_{\text{DNF}}$  in DNF und die Formel  $\psi$  in eine äquivalente Formel  $\psi_{\text{KNF}}$  in KNF um. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.39 und 2.43 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.
- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.
- Benutzen Sie je Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe) welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

#### Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

**Achtung:** Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben. Beachten Sie dazu die Abgabehinweise unter

<https://hu.berlin/Prolog>

Es ist endlich wieder Frühling geworden, und der Bienenschwarm aus Bienenstock 23 macht sich bereit zur Pollenernte. Auf der Suche nach wohl schmeckenden Pollen kommunizieren Bienen bekanntlich dadurch, dass sie kleine Tänze aufführen. Genauer betrachtet besteht ein solcher Tanz aus Flugbewegungen nach oben (**hoch**) bzw. unten (**runter**), und Saltos (**salto**). Am Ende jedes Tanzes fliegt die Biene einmal im Kreis (**kreis**).

Leider hat die Konzentrationsfähigkeit der Bienen durch den Einsatz verschiedener Pestizide sehr gelitten, so dass sie ihre Tänze nur noch unter Computerunterstützung korrekt ausführen können. Zu diesem Zweck repräsentiert der Zentralcomputer von Bienenstock 23 die Tänze der Bienen durch geschachtelte Prolog-Terme. Beispielsweise repräsentiert der Prolog-Term

$t := \text{hoch}(\text{runter}(\text{salto}(\text{kreis})))$

den Tanz, bei dem die Biene zuerst ein Stück nach oben fliegt, dann wieder ein Stück nach unten, anschließend einen Salto ausführt, und den Tanz letztendlich mit dem obligatorischen Flug im Kreis beendet.

- Schreiben Sie ein Prädikat **tanz/1**, so dass **tanz(X)** für einen beliebigen Prolog-Term **X** genau dann gilt, wenn **X** einen Tanz repräsentiert. Beispielsweise sollte das Ziel **tanz(t)** erfüllt sein, jedoch nicht das Ziel **tanz(f(3,6))**.
- Von besonderer Wichtigkeit für den Schwarm ist es, zu erkennen, wenn sich eine Biene bedroht fühlt – beispielsweise wenn Hornissen in der Nähe sind. Dies ist daran zu erkennen, dass der Tanz der Biene folgende Eigenschaften hat:
  - Jeder Salto wird direkt von einer Flugbewegung nach oben gefolgt.
  - Jede Flugbewegung nach unten wird direkt von einer Flugbewegung nach oben oder einem Salto gefolgt.

Schreiben Sie ein Prädikat `gefahr/1`, so dass `gefahr(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen Tanz repräsentiert, der die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Beispielsweise sollte das Ziel

```
gefahr(salto(hoch(runter(hoch(kreis)))))
```

erfüllt sein, jedoch nicht das Ziel `gefahr(t)`.

- (c) Zwei Bienen tanzen im Duett, wenn sie ihre Tänze *spiegelbildlich* ausführen – d. h. die Tänze der beiden Bienen haben die gleiche Länge, und jedesmal, wenn die erste Biene nach oben fliegt, fliegt die zweite Biene nach unten, und umgekehrt. Insbesondere bedeutet dies, dass beide Bienen im selben Moment einen Salto ausführen und den Tanz mit einem Flug im Kreis beenden. Tanzen zwei Bienen im Duett, so heißt dies, dass sie sich über etwas einig sind, z. B. über eine besonders üppig bewachsene Blumenwiese oder ein Hornissenennest. Schreiben Sie ein Prädikat `duett/2`, so dass `duett(X, Y)` erfüllt ist, wenn `X` und `Y` Tänze repräsentieren, die im oben erklärten Sinn spiegelbildlich zueinander sind. Beispielsweise sollte das folgende Ziel erfüllt sein:

```
duett(hoch(salto(runter(kreis))), runter(salto(hoch(kreis))))
```