Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24. Oktober 2025

Logik in der Informatik

Wintersemester 2025/2026

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 3. November 2025, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 2 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Für den Park der „Dinopark GmbH & Co. KG“, welcher sich über ein 28 mal 28 Gehege großes, quadratisches Areal erstreckt, soll ein Nutzungsplan erstellt werden. Jedes Gehege wird durch ein Paar $\langle i, j\rangle$ mit $i, j \in [28]$ identifiziert, welches mit den Gehegen $\langle i{-}1, j\rangle$, $\langle i{+}1, j\rangle$, $\langle i, j{-}1\rangle$ und $\langle i, j{+}1\rangle$ benachbart ist. Gehege am Rand des Parks haben demnach natürlich weniger als vier Nachbarn. Jedes Gehege soll höchstens eine der Arten ***B****rachiosaurus*, ***R****aptor*, ***S****tegosaurus* oder ***T****yrannosaurus* beherbergen, da sie sich untereinander nicht vertragen.

Für die Planung werden die Aussagensymbole $B_{i,j}$, $R_{i,j}$, $S_{i,j}$ und $T_{i,j}$ mit $i, j \in [28]$ verwendet. Hierbei repräsentiert z. B. $R_{13,9}$ die Aussage: „Gehege $\langle 13, 9\rangle$ beherbergt Raptoren“. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass in jedem Gehege tatsächlich nur eine der oben genannten Arten gehalten wird.

(b) Welche Bedingung wird durch die folgende Formel φ_2 repräsentiert?

$$\varphi_2 \;:=\; \bigwedge_{i,j\in\{2,\dots,27\}} \Big((B_{i,j} \vee S_{i,j}) \to (\neg T_{i-1,j} \wedge \neg T_{i+1,j} \wedge \neg T_{i,j-1} \wedge \neg T_{i,j+1}) \Big)\,.$$

(c) Raptoren haben eine Tendenz dazu, aus ihren Gehegen auszubüxen. Damit sie dem Park nicht so schnell entkommen können, dürfen keine Raptoren in den Randgehegen leben.

Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die besagt, dass keines der Raptorengehege am Rand liegt.

(d) Da diese Saurier beim kleinen Publikum besonders beliebt sind, sollen lange Laufwege, um alle vier Arten zu sehen, vermieden werden. Daher soll es mindestens ein Gehege geben, sodass jede der vier Arten in einem der benachbarten Gehege gehalten wird.

Geben Sie eine Formel φ_4 an, die diese Bedingung repräsentiert.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist *durch 3 teilbar*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 3 \cdot m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \;:=\; \begin{cases} (A_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}), & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist,} \\ ((A_n \leftrightarrow A_{n+1}) \leftrightarrow A_{n+2}), & \text{falls } n \text{ nicht durch 3 teilbar ist,} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$.

Es ist also bspw. $\varphi_1 = ((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)$, $\varphi_2 = ((A_2 \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_4 = ((A_4 \leftrightarrow A_5) \leftrightarrow A_6)$, $\varphi_5 = ((A_5 \leftrightarrow A_6) \leftrightarrow A_7)$ und $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_7)$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und beweisen Sie, dass $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

(b) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \quad \equiv \quad \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Zeigen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ unendlich viele verschiedene aussagenlogische Formeln $\psi \in \mathsf{AL}$ gibt, für die gilt:

$$\varphi \models \psi$$

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Arbeiten Sie Kapitel 2 des Buchs "Learn Prolog Now!" durch.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

- **(i)** `orks` und `uruk-hai`
- **(ii)** `koenig(X)` und `koenig(boromir)`
- **(iii)** `Balrog` und `'Balrog'`
- **(iv)** `kankra` und `'kankra'`
- **(v)** `bruder(faramir, Y)` und `bruder(X, boromir)`
- **(vi)** `hobbit(sam, X, Y)` und `hobbit(X, Y, merry)`
- **(vii)** `gefährten(ringträger(frodo), X)` und
  `gefährten(ringträger(Y), freunde(sam, Y))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe 4(b) von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- ringgemeinschaft(Y).
```