Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

05. Februar 2026

Logik und Komplexität

Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 12

Zu bearbeiten bis 12. Februar 2026

Aufgabe 1: **(20 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 4.26, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Sei $k \geqslant 1$ und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $\mathrm{EA}_{\ell,m}$ für alle $\ell \geqslant 1$ und $m \geqslant 0$ mit $m \leqslant \ell < k$ erfüllen. Dann gilt $\mathcal{A} \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} \mathcal{B}$.

Aufgabe 2: **($5 \cdot 7 = 35$ Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.

(b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär sind.

(c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.

(d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.

(e) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

Aufgabe 3: **($3 \cdot 15 = 45$ Punkte)**

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Erläutern Sie jeweils, weshalb Ihre Formel das Gewünschte leistet.

(a) Geben Sie einen $\mathrm{LFP}[\sigma]$-Satz an, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die bipartit sind.

Hinweis: Ein ungerichteter Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

(b) Wir erhalten die Logik MLFP („Monadische kleinste Fixpunktlogik"), indem wir in LFP-Formeln die Verwendung von Formeln der Form $[\mathbf{lfp}_{R,\bar{x}}\, \varphi](\bar{t})$ auf einstellige Relationen R beschränken. Sei $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Geben Sie eine $\mathrm{MLFP}[\{\leqslant\}]$-Formel $\varphi_m(x)$ an, die in einer endlichen geordneten Struktur besagt, dass der Rang von x ein Vielfaches von m ist.

(c) Welche Klasse gerichteter endlicher Graphen wird vom folgenden $\mathrm{LFP}[\sigma]$-Satz φ definiert?

$$\varphi \;:=\; \forall x \; \Big[\mathbf{lfp}_{P,x} \; \forall y \; \Big(P(y) \vee \neg E(y,x)\Big)\Big](x).$$