Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

29. Januar 2026

Logik und Komplexität

Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 11

Zu bearbeiten bis 05. Februar 2026

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Teil (a) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $F \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ gilt:

$$\mu(\mathrm{EA}_{\ell,F} \mid \textsc{All}(\sigma)) = 1.$$

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Teil (b) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, jedes $k \geqslant 1$ und alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, die jedes Erweiterungsaxiom $\mathrm{EA}_{\ell,F}$ mit $\ell \leqslant k$ und $F \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ erfüllen, gilt: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ erfüllen die gleichen $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze vom Quantorenrang $\leqslant k$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Theorem 4.24, d.h. zeigen Sie, dass Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im k-Pebble Spiel auf $(\mathcal{A}, \vec{a})$ und $(\mathcal{B}, \vec{b})$ hat, wenn $(\mathcal{A}, \vec{a}) \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} (\mathcal{B}, \vec{b})$ gilt.

Aufgabe 4: **$(10 + 15 = 25$ Punkte$)$**

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Sei $\textsc{Conn}$ die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen und sei UG die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen.

(a) Zeigen Sie, dass $\textsc{Conn}$ nicht $\mathrm{L}^2_{\infty\omega}[\sigma]$-definierbar in UG ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: $\textsc{Conn}$ ist $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}[\sigma]$-definierbar in UG.