Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

8. Januar 2026

Logik und Komplexität

Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis 15. Januar 2026

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{S}$ gilt:

$$\mathrm{C} \text{ ist FO-definierbar in S} \implies \mathrm{C} \text{ ist Hanf-lokal in S.}$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{S}$:

$$\mathrm{C} \text{ ist Hanf-lokal in S} \implies \mathrm{C} \text{ ist FO-definierbar in S ?}$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Zur Erinnerung: Wir sagen „C ist FO definierbar in S“, falls es einen FO[σ]-Satz φ gibt, s.d. f.a. $\mathcal{A} \in \mathrm{S}$ gilt: $\mathcal{A} \in \mathrm{C} \iff \mathcal{A} \models \varphi$.

Aufgabe 2: **($2 \cdot 25 = 50$ Punkte)**

Sei $\sigma \coloneqq \{ E \}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

(a) Gibt es eine EMSO[σ]-Formel $\varphi(x, y)$, sodass für alle ungerichteten endlichen Graphen $G = (V^G, E^G)$, die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}_G$ und für alle Knoten $a, b \in V^G$ gilt:

$$\mathcal{A}_G \models \varphi[a, b] \quad \iff \quad \text{in } G \text{ gibt es einen Weg von Knoten } a \text{ zu Knoten } b \text{ ?}$$

(b) Gibt es einen EMSO[σ]-Satz ψ, sodass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V^G, E^G)$ und die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}_G$ gilt:

$$\mathcal{A}_G \models \psi \quad \iff \quad \text{Jeder Knoten von } G \text{ hat einen geraden Grad ?}$$

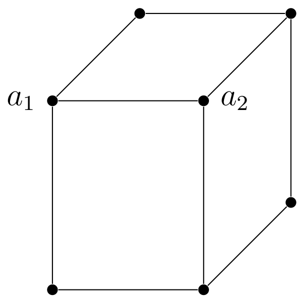
Beweisen Sie, dass Ihre Antworten korrekt sind.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

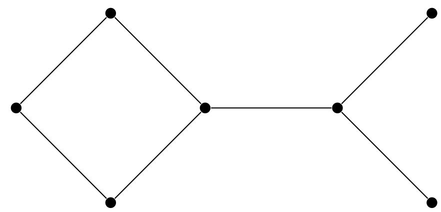
Aufgabe 3: **($5 + 10 + 10 = 25$ Punkte)**

Betrachten Sie die $\{E\}$-Strukturen $\mathcal{A} := (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, E^{\mathcal{B}})$, die durch folgende Skizze dargestellt werden, wobei jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u) repräsentieren:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



(a) Finden Sie $b_1, b_2 \in B$, sodass $(a_1, a_2 \mapsto b_1, b_2) \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(b) Was ist das größte m, sodass es $b_1, b_2 \in B$ mit $(\mathcal{A}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{B}, b_1, b_2)$ gibt ? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für Ihre Zahl m geeignete Elemente $b_1, b_2 \in B$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leqslant m}\colon (\mathcal{A}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{B}, b_1, b_2)$ angeben.

(c) Beweisen Sie, dass ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist.