Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. Dezember 2025

Logik und Komplexität

Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis 8. Januar 2026

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Sei $\Sigma := \{ a, b \}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen besteht, in der jedes Blatt gerade Höhe hat. Zeigen Sie, dass es keinen $\mathrm{FO}[\tau_\Sigma]$-Satz φ gibt, sodass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörige τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$ gilt:

$$t \in L \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}_t \models \varphi$$

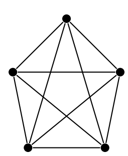
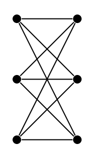
Bemerkung: In Aufgabe 3 von Blatt 7 haben Sie bereits gezeigt, dass L FO-definierbar ist, wenn die Struktur $\mathcal{A}_t$ die „Nachkomme“-Relation $\mathrm{desc}^{\mathcal{A}_t}$ enthält.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es keinen $\mathrm{FO}[\{ E \}]$-Satz φ gibt, sodass für jeden endlichen ungerichteten Graphen G und den zu G gehörenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ gilt:

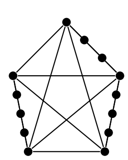
$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad G \text{ ist planar.}$$

Hinweis: Gemäß dem Satz von Kuratowski ist ein endlicher ungerichteter Graph G genau dann planar, wenn er keine Unterteilung eines der folgenden Graphen als Subgraphen enthält:

$K_5 :=$  $K_{3,3} :=$ 

Ein Graph G' geht durch Unterteilung einer Kante $e := \{ u, v \} \in E$ aus $G = (V, E)$ hervor, falls $G' = (V \cup \{ w \}, (E \setminus \{ e \}) \cup \{ \{ u, w \}, \{ w, v \} \})$ für einen Knoten $w \notin V$. Ein Graph U ist eine *Unterteilung* eines Graphen G, wenn es eine Folge $G_1, \ldots, G_\ell$ von Graphen mit $\ell \geqslant 1$ gibt, sodass gilt: $G_1 = G$, $G_\ell = U$, und für jedes $i \in \{ 2, \ldots, \ell \}$ geht G_i aus G_{i-1} durch Unterteilung einer Kante von G_{i-1} hervor.

Beispiel: Eine Unterteilung von K_5



— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(25 + 15 = 40 Punkte)**

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei σ_k die Signatur mit k unären Relationssymbolen $P_1, \dots, P_k$. Für jede σ_k-Struktur $\mathcal{A}$ und jedes $a \in A$ sei $\text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_k$ definiert als

$$\text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) \;:=\; \{\, P_i \;:\; i \in \{\, 1, \dots, k \,\}, \;\; a \in P_i^{\mathcal{A}} \,\}.$$

Für jede Farbe $F \subseteq \sigma_k$ sei

$$M_F^{\mathcal{A}} \;:=\; \{\, a \in A \;:\; \text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) = F \,\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle σ_k-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt:
Wenn für alle Farben $F \subseteq \sigma_k$ gilt, dass

$$|M_F^{\mathcal{A}}| = |M_F^{\mathcal{B}}| \quad \text{oder} \quad |M_F^{\mathcal{A}}|, |M_F^{\mathcal{B}}| \geqslant 2^m,$$

dann hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Der Begriff "m-Runden MSO-Spiel" bezieht sich hier auf die Lösung von Aufgabe 4 auf Blatt 5 bzw. Aufgabe 1 auf Blatt 6.

(b) Folgern Sie, dass es für jeden MSO[σ_k]-Satz einen auf der Klasse aller σ_k-Strukturen äquivalenten FO[σ_k]-Satz gibt.