Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

11. Dezember 2025

Logik und Komplexität

Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis 18. Dezember 2025

Bemerkung: Die Nummern auf diesem Blatt beziehen sich auf das Skript-Fragment unter

`https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS25-26/LuK/downloads15/LuK_Skript_Kapitel3_Abschnitte3-1bis3-5.pdf` .

Aufgabe 1: **(13 + 12 = 25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{ S_v, S_h \}$, wobei S_v und S_h (für „vertikale“ und „horizontale“ Kanten) zweistellige Relationssymbole seien.

Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k{\times}\ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{ 1, \ldots, k \} \times \{ 1, \ldots, \ell \}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j), (i{+}1, j) \big) \ : \ 1 \leqslant i < k, \ 1 \leqslant j \leqslant \ell \Big\}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j), (i, j{+}1) \big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant j < \ell \Big\}. \end{aligned}$$

(a) Seien $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Geben Sie zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ an, sodass $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \cong \mathcal{G}_{k,\ell}$.

(b) Arbeiten Sie die Details zu Beispiel 3.22 aus, das heißt, zeigen Sie, dass es keinen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, der die Gitter *quadratischer* Größe beschreibt, d.h. bei dem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: $\mathcal{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Arbeiten Sie die Details zum Beweis von Lemma 3.24 (Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen) aus.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen besteht, in der jedes Blatt gerade Höhe hat.

Sei $\tau'_\Sigma := \tau_\Sigma \cup \{\mathrm{desc}\}$, wobei desc ein zweistelliges Relationssymbol ist. Für jeden Σ-Baum t ist die τ'_Σ-Struktur $\mathcal{B}_t$ eine Erweiterung der τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$ um die Relation $\mathrm{desc}^{\mathcal{B}_t}$, wobei

$$(u, v) \in \mathrm{desc}^{\mathcal{B}_t} \quad \iff \quad v \text{ ist ein Nachkomme von } u.$$

Dabei ist $v \in B_t$ ein Nachkomme von $u \in B_t$ genau dann, wenn es einen Weg der Länge $\geqslant 1$ von u nach v in dem Graphen $(B_t, E_1^{\mathcal{B}_t} \cup E_2^{\mathcal{B}_t})$ gibt.

Zeigen Sie, dass es einen FO$[\tau'_\Sigma]$-Satz φ gibt, so dass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörende τ'_Σ-Struktur $\mathcal{B}_t$ gilt:

$$t \in L \quad \iff \quad \mathcal{B}_t \models \varphi.$$