

Logik und Komplexität

Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis 11. Dezember 2025

Bemerkung: Die Nummern auf diesem Blatt beziehen sich auf das Skript-Fragment unter

https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS25-26/LUK/downloads15/LuK_Skript_Kapitel3_Abschnitte3-1bis3-5.pdf.

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Betrachten Sie das in der letzten Übungsstunde behandelte m -Runden MSO-Spiel und *beweisen* Sie, dass die Aussagen (1) und (2) von Blatt 5 Aufgabe 4 äquivalent zueinander sind.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei σ eine endliche relationale Signatur und seien $k, m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die in Bemerkung 3.13(a) formulierte Aussage korrekt ist, das heißt, zeigen Sie, dass die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] := \left\{ \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m(\bar{x}) : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur und } \bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k \right\}$$

endlich ist, indem Sie eine obere Schranke für ihre Kardinalität angeben.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie Korollar 3.16(b), das heißt, zeigen Sie dass für jede endliche relationale Signatur σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

Bis auf logische Äquivalenz gibt es nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Formeln mit freien Variablen aus x_1, \dots, x_k und Quantortiefe $\leq m$.

Geben Sie eine möglichst kleine obere Schranke $f(\sigma, k, m)$ für die Anzahl der verschiedenen, paarweise nicht äquivalenten Formeln an.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Arbeiten Sie alle noch fehlenden Details zu Beispiel 3.19 heraus, das heißt, zeigen Sie, dass für alle Zahlen $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\mathcal{A}_{k_1, \ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2, \ell_2} \iff (k_1 = k_2 \text{ oder } k_1, k_2 \geq m) \text{ und } (\ell_1 = \ell_2 \text{ oder } \ell_1, \ell_2 \geq m).$$

Zur Erinnerung: Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligigen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“). Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k, \ell}$ eine σ -Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $\mathcal{A}_{k, \ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k -elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k, \ell}}$ und der ℓ -elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k, \ell}}$.