Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

13. Dezember 2024

Logik in der Informatik

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 6. Januar 2025, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 9 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

(a) Beweisen Sie folgende Aussage:

Für alle $m \in \mathbb{N}$, alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\bar{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\bar{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:

> Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \bar{a})$ und $(\mathcal{B}, \bar{b})$.

(b) Sei $\Sigma := \{ a, b \}$ und $\sigma_\Sigma := \{ \leqslant, P_a, P_b \}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol $\leqslant$ und den 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b. Beweisen Sie, dass es keinen $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz gibt, der die Sprache aller nicht-leeren Worte aus $\{ a, b \}^*$ beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist.

Zur Erinnerung: Ein $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $\quad w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

Aufgabe 3: **(60 Punkte)**

Sei $\sigma := \{ E \}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E.

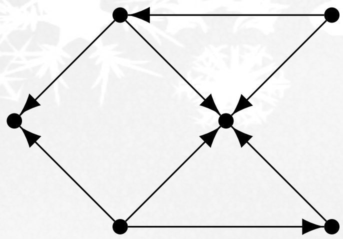
(a) Seien x, y, z drei paarweise verschiedene Variablen. Betrachten Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln

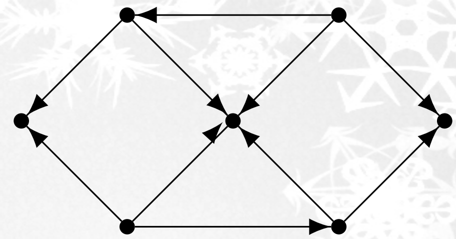
$$\begin{aligned} \varphi &:= \big(\exists x \forall y\, x = y \ \wedge \ E(z,z) \big) \\ \psi_1 &:= \big(E(z,z) \ \wedge \ \forall y \exists x\, x = y \big) \\ \psi_2 &:= \big(E(x,y) \ \wedge \ \forall x \exists y\, x = z \big) \end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $i \in \{ 1, 2 \}$ an, ob $\varphi \equiv \psi_i$ gilt und beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

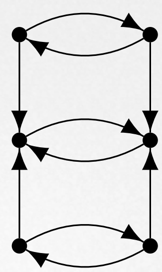
(b) Betrachten Sie die folgenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

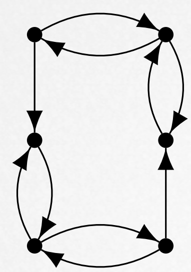
$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

- **(i)** Welches ist das kleinste m, sodass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden EF-Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $(m-1)$-Runden EF-Spiel beschreiben.
- **(ii)** Geben Sie für Ihre Antwort m aus Teil **(i)** einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe m an, sodass $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

(c) Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

Sei $\varphi := \exists x \exists y \forall z \Big(E(z,x) \ \vee \ E(z,y) \Big)$. Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

- **(i)** Leiten Sie aus dem $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ eine Gewinnstrategie für Spoiler im EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ her. Geben Sie an, wie viele Runden Spoiler benötigt, wenn er dieser Strategie folgt. Beschreiben Sie die Strategie ähnlich zur Beweisidee von Satz 3.51 im Vorlesungsskript.
- **(ii)** Existiert eine bessere Gewinnstrategie für Spoiler, d.h. eine Strategie, mit der er in weniger Runden das Spiel gewinnt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) **Beweisen oder widerlegen** Sie die folgenden Aussagen:

- **(i)** Sei $\sigma := \varnothing$. Es gibt einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ, sodass für jede endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \text{ ist eine Primzahl.}$$

- **(ii)** Sei $\sigma := \{ E, F \}$ die Signatur, welche aus den 2-stelligen Relationssymbolen E und F besteht. Es gibt einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ, sodass für jede σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, E^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}})$, bei der $\mathcal{G} := (A, E^{\mathcal{A}})$ ein endlicher gerichteter Pfad ist, gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad F^{\mathcal{A}} \text{ ist der reflexive und transitive Abschluss von } E^{\mathcal{A}}.$$

Dabei nutzen wir folgende Begriffe:

- Ein Graph $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ ist ein endlicher gerichteter Pfad, falls es ein $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt, sodass $|V^{\mathcal{G}}| = n$, $V^{\mathcal{G}} = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ und $E^{\mathcal{G}} = \{ (v_i, v_{i+1}) \ : \ 1 \leqslant i < n \}$.
- Seien $E^{\mathcal{A}}$, $F^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$. $F^{\mathcal{A}}$ heißt transitiver und reflexiver Abschluss von $E^{\mathcal{A}}$, wenn für alle $(a, a') \in A \times A$ gilt:

$$(a, a') \in F^{\mathcal{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad a = a' \text{ oder es gibt im gerichteten Graphen } \mathcal{G} = (A, E^{\mathcal{A}}) \text{ einen Weg vom Knoten } a \text{ zum Knoten } a'.$$