Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

6. Dezember 2024

Logik in der Informatik

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 16. Dezember 2024, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 8 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

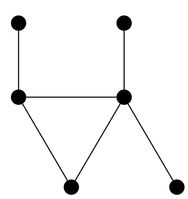
(a) Sei $\sigma := \{ E, f \}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht?

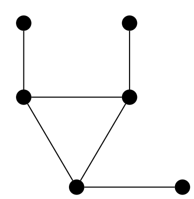
(i) $\forall x \, \exists y \;\, f(y) = x \quad \equiv \quad \exists y \, \forall x \;\, f(y) = x$

(ii) $\forall x \, \forall y \, \big(\neg f(x) = y \; \to \; E(y,x) \big) \;\; \equiv \;\; \forall y \, \forall x \, \big(\neg E(y,x) \; \to \; f(x) = y \big)$

(iii) $\exists x \, \exists y \;\, f(x) = y \;\; \equiv \;\; \forall x \, \exists y \, \Big(\big(\, x = y \, \vee \, E(x,y) \, \big) \; \to \; \exists z \, \big(\, z = y \, \vee \, E(z,y) \, \big) \Big)$

(b) In der folgenden Darstellung der Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u,v) und (v,u):

$\mathcal{A}$: 

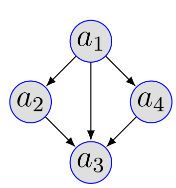
$\mathcal{B}$: 

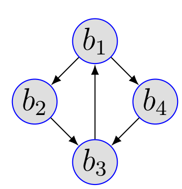
(i) Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für Duplicator im 2-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel (EF-Spiel) auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(ii) Welches ist das kleinste m, sodass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden EF-Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $m{-}1$-Runden EF-Spiel beschreiben.

(iii) Geben Sie für Ihre Zahl m aus **(ii)** einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe m an, sodass gilt: $\;\mathcal{A} \models \varphi\;$ und $\;\mathcal{B} \not\models \varphi$.

(c) Sei $\sigma := \{ E \}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie die σ-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, E^{\mathcal{B}})$, die durch die beiden gerichteten Graphen in der unten angegebenen Abbildung repräsentiert werden.
Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ an, für den gilt: $\quad \mathcal{A} \models \varphi \quad$ und $\quad \mathcal{B} \models \neg\varphi$.
Begründen Sie, warum Ihr φ von $\mathcal{A}$ erfüllt wird, aber nicht von $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathcal{D}$ aus der Vorlesung und die folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ_1, φ_2 und φ_3. Berechnen Sie die Relationen $[\![\varphi_1(x)]\!]^{\mathcal{D}}$, $[\![\varphi_2(x_1,x_2)]\!]^{\mathcal{D}}$, $[\![\varphi_3(x_1,x_2,x_3)]\!]^{\mathcal{D}}$ und beschreiben Sie umgangssprachlich für jede der drei Formeln, welche Anfrage sie beschreibt.

(i) $\varphi_1 \;:=\; \exists x_F\, R_{Prog}(\text{‘Moviemento’}, x_F, x)$

(ii) $\varphi_2 \;:=\; \exists x_{S_1} \exists x_T \Big(R_{Kino}(x_1, x_2, x_{S_1}, x_T) \;\wedge\; \exists x_R\, \exists x_{S_2}\, R_{Film}(x_1, x_R, x_{S_2}) \Big)$

(iii) $\varphi_3 \;:=\; \exists x_K\, R_{Prog}(x_K, x_2, x_3) \;\wedge$
$\exists x_{S_1} \Big(R_{Film}(x_2, x_1, x_{S_1}) \;\wedge\; \forall x_F\, \forall x_{S_2} \big(R_{Film}(x_F, x_1, x_{S_2}) \;\to\; x_F = x_2 \big) \Big)$

(b) Sei $\sigma := \{ E, g \}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E und dem 1-stelligen Funktionssymbol g. Betrachten Sie den $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz

$$\varphi \;:=\; \forall x \forall y \Big(\big(\neg\, g(y) = g(x) \;\leftrightarrow\; E(x,y) \big) \;\vee\; \big(E(x,y) \;\leftrightarrow\; \neg E(y,x) \big) \Big).$$

Geben Sie zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, deren Universum jeweils aus höchstens 4 Elementen besteht, sodass gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Begründen Sie, warum φ von $\mathcal{A}$ erfüllt wird, aber nicht von $\mathcal{B}$.

(c) **(i)** Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Terme (Satz 3.27) per Induktion über den Aufbau von Termen.

(ii) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Satz 3.28) per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 10 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für Aufgabenteil (a) handschriftlich an und reichen Sie es im PDF-Format in Moodle ein. Die Lösung der Aufgabenteile (b), (c) und (d) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code (in einer Datei für diese drei Aufgabenteile zusammen) in einem extra-Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!*

(a) Gegeben sei das folgende Prolog-Programm:

```
a(X, Y) :- b(X, Y).
a(1, 1).
b(X, X) :- c(X).
b(X, Y) :- c(X), !, c(Y).
b(X, Y) :- c(X), c(Y).
c(2).
c(3).
```

Zeichnen Sie einen Suchbaum für die folgende Anfrage: `?- a(X, Y).`

(b) Schreiben Sie in `blatt8.pl` ein Prädikat `not_member/2`, sodass `not_member(X, L)` für einen Term `X` und eine Liste `L` genau dann erfüllt ist, wenn `X` mit *keinem* Element von `L` unifiziert werden kann. Verwenden Sie dabei abgesehen vom Cut und dem in SWI-Prolog vordefinierten Prädikat `fail/0` keine weiteren Prädikate, und insbesondere nicht `\=/2`.

(c) Führen Sie in `blatt8.pl` einen neuen Operator `<=>` für die Biimplikation $\leftrightarrow$ ein, der den gleichen Typ und die gleiche Präzedenz wie der in `al.pl` definierte Operator `=>` hat.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

(d) Implementieren Sie in `blatt8.pl`, analog zu Beispiel 2.52 im Vorlesungsskript, Schritt 1 des Tseitin-Verfahrens. D.h., schreiben Sie ein Prädikat `tseitin/2`, sodass die Anfrage `tseitin(F, L)` für eine aussagenlogische Formel `F` eine Liste `L` aussagenlogischer Formeln ausgibt, die die folgenden Eigenschaften hat:

- Die Konjunktion der Formeln in der Liste `L` ist erfüllbarkeitsäquivalent zu `F`.
- Die Liste `L` enthält für jede Teilformel von `F` (abgesehen von Literalen) genau eine Formel.
- In jeder Formel aus `L` kommen höchstens 3 verschiedene Aussagensymbole vor.

Beispielsweise sollte Prolog auf die Anfrage:

```
tseitin((p => ~q) \/ (~ (p /\ q) /\ r), L).
```

wie folgt antworten:

```
L = [x1, x1<=>x2\/x3, x2<=> (p=> ~q), x3<=>x4/\r, x4<=> ~x5, x5<=>p/\q].
```

Hierbei sind die konkrete Wahl der neuen Aussagensymbole sowie die Reihenfolge der Formeln in der Repräsentation der Menge unwesentlich.

Hinweise:

- Benutzen Sie zur Erzeugung neuer Aussagensymbole das in SWI-Prolog eingebaute Prädikat `gensym/2`. Das Prädikat `gensym/2` instantiiert bei dem Aufruf `gensym(x, A)` die Variable `A` mit einem Atom der Form `x`n, wobei eine Zahl n so gewählt wird, dass das Atom `x`n in diesem Lauf von SWI-Prolog noch nicht verwendet wurde.
- Benutzen Sie den in Teilaufgabe (c) definierten Operator `<=>`.
- Nutzen Sie ggf. Cut oder Negation. Führen Sie bei Bedarf Hilfsprädikate ein.