Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

22. November 2024

Logik in der Informatik

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 2. Dezember 2024, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 6 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Es gibt eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$, die zu keiner Hornformel äquivalent ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Es gibt eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$, die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist.

(c) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabe-Klauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi \ := \ R \wedge (\mathbf{0} \to T) \wedge (\mathbf{1} \to (P \vee \neg Q)) \wedge (S \to \mathbf{0}) \wedge ((R \wedge \neg S \wedge T) \to \neg W) \wedge (R \vee \neg T)$$

(d) Sei $\sigma := \{ f, R, S, c \}$ die Signatur mit dem 1-stelligen Funktionssymbol f, dem 2-stelligen Relationssymbol R, dem 3-stelligen Relationssymbol S und dem Konstantensymbol c. Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$, wobei $A := \{ 1,2,3,4,5 \}$, $B := \{ u,v,w,y,z \}$, $C := \{ \odot, \ominus, \oplus, \oslash, \otimes \}$, und

$$R^{\mathcal{A}} := \{ (3,3),(5,4),(1,1) \}, \quad S^{\mathcal{A}} := \{ (2,2,4),(5,3,1) \}, \quad c^{\mathcal{A}} := 2;$$
$$R^{\mathcal{B}} := \{ (u,u),(v,v),(z,y) \}, \quad S^{\mathcal{B}} := \{ (w,w,y),(z,u,v) \}, \quad c^{\mathcal{B}} := w;$$
$$R^{\mathcal{C}} := \{ (\otimes,\otimes),(\oplus,\oplus),(\odot,\ominus) \}, \quad S^{\mathcal{C}} := \{ (\odot,\oplus,\otimes),(\oslash,\oslash,\ominus) \}, \quad c^{\mathcal{C}} := \oslash;$$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}}\colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}}\colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}}\colon C \to C$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{A}}(x)$	2	1	2	5	4

x	u	v	w	y	z
$f^{\mathcal{B}}(x)$	z	w	v	u	y

x	$\odot$	$\ominus$	$\oplus$	$\oslash$	$\otimes$
$f^{\mathcal{C}}(x)$	$\ominus$	$\odot$	$\oslash$	$\otimes$	$\oslash$

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Seien Q, R, S, T, U, W unterschiedliche Aussagensymbole aus AS. Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Klauselmenge Γ an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht und geben Sie an, welche Ausgabe er am Ende liefert.

$$\begin{aligned}\Gamma \;:=\; \Big\{ &\{R,\neg S,T\},\{U,W\},\{\neg Q,\neg R,S\},\{\neg T,U\},\{R,\neg U,\neg W\},\{Q,R,S,T\},\\ &\{Q,\neg T\},\{\neg Q,\neg R,T\},\{\neg R,\neg S,\neg T,\neg U\},\{\neg U,W\},\{U,\neg W\},\{Q\}\Big\}\end{aligned}$$

Hinweise zum Vorgehen:

- Orientieren Sie sich für die Notation an Beispiel 2.63.
- Wählen Sie bitte in Zeile 4 des DPLL-Algorithmus positive Literale, und zwar in alphabetischer Reihenfolge.
- Wählen Sie bitte bei der Anwendung der Vereinfachungsheuristiken die Literale in alphabetischer Reihenfolge.
- Geben Sie wie in Beispiel 2.63 die entstehende Klauselmenge (ohne gestrichene Klauseln) und die benutzte Vereinfachungsheuristik an.
- Ihre Lösung sollte *höchstens* 20 Schritte benötigen.
- Lösungen, die sich nicht an die Vorgaben halten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert.

(b) Seien S, T, U, V, W unterschiedliche Aussagensymbole aus AS. Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht und geben Sie an, welche Ausgabe er am Ende liefert.

$$\begin{aligned}\Gamma \;:=\; \Big\{ &\{U\},\ \{W\},\ \{V,\neg W\},\ \{S,\neg T\},\ \{U,\neg V,\neg W\},\\ &\{\neg T,\neg V\},\ \{S,\neg U,\neg V\},\ \{\neg S,\neg T\}\Big\}\end{aligned}$$

Hinweise zum Vorgehen:

- Orientieren Sie sich für die Notation an Beispiel 2.65.
- Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklausel mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.
- Ihre Lösung sollte *höchstens* 5 Schleifendurchläufe benötigen.
- Lösungen, die sich nicht an die Vorgaben halten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert.

(c) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmenge Γ aus Teilaufgabe **(a)** bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie die Relation $R := \{\,(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\,\}$ über der Menge $A := \{\,a,b,c,d\,\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils

(i) reflexiv,
(ii) symmetrisch,
(iii) antisymmetrisch,
(iv) konnex,
(v) transitiv

ist? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 6 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für Aufgabenteil (a) handschriftlich an (also wie Aufgabe 3) und reichen Sie diese in dem für Aufgabenteil (a) vorgesehenen Abgabefach bei Moodle ein. Die Lösung der Aufgabenteile (b) und (c) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code (in einer Datei für beide Aufgabenteile zusammen) in einem extra-Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!*

(a) Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- append([c,d], [e,a], X).
```

(b) *Binärbäume* seien wie in der dritten Prolog-Übungsstunde definiert (vgl. die Folie zum Spiegeln von Binärbäumen auf der Website zur Prolog-Übung). Beispielsweise wird der linke dort abgebildete Binärbaum $\mathcal{B}$ repräsentiert durch den folgenden Prolog-Term:

$$\texttt{B} := \texttt{tree(tree(leaf(1),tree(leaf(2),leaf(3))),leaf(4))}$$

Schreiben Sie ein Prädikat `label/2`, so dass die Anfrage `?- label(B, X).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums $\mathcal{B}$ und einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` die Beschriftung eines Blattes von $\mathcal{B}$ ist.

Für unseren Baum $\mathcal{B}$ soll beispielsweise die Anfrage

```
?- label(B, X).
```

die Antworten

```
X = 1;     X = 2;      X = 3;      X = 4.
```

liefern.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `labels/2`, so dass die Anfrage `?- labels(B, Y).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und eine Liste `Y` von Prolog-Termen genau dann erfüllt ist, wenn `Y` eine Auflistung der Beschriftungen aller Blätter des repräsentierten Binärbaums $\mathcal{B}$ ist; und zwar in der Reihenfolge vom am weitesten links zum am weitesten rechts stehenden Blatt.

Für unseren Baum $\mathcal{B}$ soll beispielsweise die Anfrage

```
?- labels(B, Y).
```

die Antwort

```
Y = [1, 2, 3, 4].
```

liefern.

Hinweis: Benutzen Sie gegebenfalls das Prädikat `append/3`.