

Logik in der Informatik

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 3

Abgabe: bis 11. November 2024, 13.00 Uhr

Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 3 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

- (a) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\rightarrow}$, sodass für alle $X, Y \in \text{AS}$ und alle Interpretationen \mathcal{I} gilt:

$$\llbracket (X \tilde{\rightarrow} Y) \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 - \llbracket (X \rightarrow Y) \rrbracket^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.27) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren und beweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Betrachten Sie die Einschränkung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems auf Formeln in DNF, d.h.: Die Eingabe besteht aus einer aussagenlogischen Formel φ in DNF und die Aufgabe ist, zu entscheiden, ob φ erfüllbar ist.

Finden Sie heraus, ob dieses Problem effizient gelöst werden kann. Falls „ja“, geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des Problems an; falls „nein“, weisen Sie nach, dass das Problem NP-hart ist.

Aufgabe 3:

(40 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass für jede Formel $\varphi \in \text{AL}$, in der keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn φ nicht allgemeingültig ist, dann ist $\tilde{\varphi}$ erfüllbar.

- (b) Geben Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\vee, \mathbf{1}\}$ und $\tau_2 := \{\neg, \rightarrow\}$ an, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.33). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- (c) Betrachten Sie die beiden Formeln

$$\begin{aligned}\varphi &:= \left((\neg A_3 \vee (A_2 \vee \neg A_1)) \wedge (\neg A_3 \vee A_0) \right) \text{ und} \\ \psi &:= \left(\neg A_3 \vee \left((\neg A_2 \rightarrow \neg A_1) \wedge A_0 \right) \right).\end{aligned}$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und die Formel ψ in eine äquivalente Formel ψ_{KNF} in KNF um. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.39 und 2.43 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.

- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.
- Wenden Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25 an. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe), welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie die Konventionen aus der Vorlesung hinsichtlich Klammerung nicht anwenden. Das heißt, Sie dürfen **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben. Beachten Sie dazu die Abgabehinweise unter

<https://hu.berlin/prolog>

Richie R! Rost stellt den Studierenden seiner Dance-Academy den Tanz *Niveaulimbo* vor. Ein *Niveaulimbo* ist eine Folge der Moves *Crazy Crump* (`crazy_crump`) und *Hipster Hop* (`hipster_hop`). Zudem endet jeder *Niveaulimbo* in der Ruheposition *Booty Brake* (`booty_brake`). Wir repräsentieren einen *Niveaulimbo* durch geschachtelte Prolog-Terme. Beispielsweise repräsentiert der Prolog-Term $t_1 := \text{crazy_crump}(\text{crazy_crump}(\text{hipster_hop}(\text{booty_brake})))$ den *Niveaulimbo*, der mit zwei Crazy Crumps beginnt, gefolgt von einem Hipster Hop, und der schließlich in der Ruheposition *Booty Brake* endet.

- Schreiben Sie ein Prädikat `niveaulimbo/1`, so dass `niveaulimbo(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen *Niveaulimbo* repräsentiert. Beispielsweise sollte `niveaulimbo(t1)` erfüllt sein.
- Ein *krasser Niveaulimbo* ist ein *Niveaulimbo*, der folgende zusätzliche Bedingungen erfüllt:
 - Auf jeden Crazy Crump folgt direkt ein weiterer Crazy Crump oder ein Hipster Hop.
 - Auf jeden Hipster Hop folgt direkt ein Crazy Crump oder der *Booty Brake*.

Schreiben Sie ein Prädikat `krass/1`, so dass `krass(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen *krassen Niveaulimbo* repräsentiert. Beispielsweise sollte `krass(t1)` erfüllt sein, jedoch nicht `krass(hipster_hop(crazy_crump(booty_brake)))`.

- Schreiben Sie ein Prädikat `duo/2`, so dass `duo(X, Y)` für zwei Prolog-Terme `X` und `Y` genau dann gilt, wenn `X` und `Y` *Niveaulimbos* mit der gleichen Anzahl von Moves repräsentieren und es gilt: Jedesmal wenn im *Niveaulimbo* `X` ein Crazy Crump ausgeführt wird, wird im *Niveaulimbo* `Y` ein Hipster Hop ausgeführt; und jedesmal wenn im *Niveaulimbo* `X` ein Hipster Hop ausgeführt wird, wird im *Niveaulimbo* `Y` ein Crazy Crump ausgeführt.