Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

22. Januar 2025

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 12

Zu bearbeiten bis 5. Februar 2025

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Arbeiten Sie den Beweis zu Satz 4.15 (Der Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit) im Detail aus.

Aufgabe 2: (35 Punkte)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei R ein r-stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ heißt *im Endlichen monoton in* R, wenn für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Relationen $R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls} \quad R_1^{\mathcal{A}} \subseteq R_2^{\mathcal{A}}, \quad \text{so} \quad \varphi\Big(\mathcal{A}, R_1^{\mathcal{A}}\Big) \subseteq \varphi\Big(\mathcal{A}, R_2^{\mathcal{A}}\Big),$$

wobei $\varphi(\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) \coloneqq \{\bar{a} \in A^s : (\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

> MONOTONIE IM ENDLICHEN:
>
> *Eingabe:* Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$.
>
> *Frage:* Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ im Endlichen monoton in R?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trakhtenbrot.

Aufgabe 3: (20 + 15 = 35 Punkte)

Sei $\sigma = \{R_1, \ldots, R_k\}$ eine relationale Signatur mit $\text{ar}(R_i) = 1$ für alle $i \in [k]$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für jeden $\text{FO}[\sigma]$-Satz φ mit Quantorenrang $\text{qr}(\varphi) = q$ gilt:

Wenn φ erfüllbar ist, so hat φ ein Modell $\mathcal{B}$ mit $|B| \leqslant (k+1) \cdot 2^{k+1} \cdot q$.

Mögliches Vorgehen: Erweitern Sie ein Modell $\mathcal{A}$ von φ um eine Relation $R_{k+1}^{\mathcal{A}} = A \setminus \bigcup_{i \in [k]} R_i^{\mathcal{A}}$. Zeigen Sie dann (beispielsweise mittels Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen), dass es eine $\sigma \cup \{R_{k+1}\}$-Struktur $\mathcal{B}$ mit $|B| \leqslant (k+1) \cdot 2^{k+1} \cdot q$ gibt, sodass $\mathcal{B} \models \varphi$.

(b) Beweisen Sie Satz 3.24 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass gilt:

Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ ist entscheidbar.