

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 11

Zu bearbeiten bis 22. Januar 2025

Aufgabe 1:

(50 Punkte)

Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma_{\text{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 2 von Blatt 10 bewiesene Aussage. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. σ_{Graph} -Strukturen).

Aufgabe 2:

(50 Punkte)

Gilt auch die folgende Variante von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz?

Jede σ_{Ar} -Theorie T , für die gilt

- (1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar)*
- (2) T besitzt ein semi-entscheidbares Axiomensystem und*
- (3) $T \supseteq Q$*

ist unvollständig (d.h. es gibt einen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ -Satz φ , so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt).

Falls Ihre Antwort „ja“ ist, so beweisen Sie, dass Sie Recht haben; falls Ihre Antwort „nein“ ist, so zeigen Sie auf, welche Probleme entstehen, wenn man versucht, den in der Vorlesung behandelten Beweis von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz auf die in dieser Aufgabe formulierte Variante zu übertragen.