Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

8. Januar 2025

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 10

Zu bearbeiten bis 15. Januar 2025

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Sei $\mathcal{Z}$ die σ_{Ar}-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und Konstanten $0^{\mathcal{Z}} = 0$ und $1^{\mathcal{Z}} = 1$, für die $\leqslant^{\mathcal{Z}}$, $+^{\mathcal{Z}}$ und $\cdot^{\mathcal{Z}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind.

Zeigen Sie: $\mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 2: (35 Punkte)

Eine Signatur σ heißt *binär*, falls jedes Symbol in σ ein Relationssymbol der Stelligkeit 2 ist. Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Es gibt eine endliche, binäre Signatur $\hat{\sigma}$, sodass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Sei $\tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}} := \{\leqslant, R_+, R_\cdot, R_0, R_1\}$ die im Beweis vom Satz von Trakhtenbrot eingeführte Signatur. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von $\tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}}$-Strukturen durch kantengefärbte Graphen, repräsentiert durch Strukturen über einer geeigneten binären Signatur $\hat{\sigma}$. Benutzen Sie die in der Vorlesung bewiesene Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\mathrm{FO}[\tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}}]$-Sätze,um die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$-Sätze zu beweisen.

Aufgabe 3: (35 Punkte)

Zeigen Sie, dass in Definition 4.10 („Repräsentierbarkeit einer Funktion“) die Bedingung (1.2) bereits aus den Bedingungen (1.1) und (2) folgt, sofern $T \supseteq Q$ ist. D.h.:

Sei $T \supseteq Q$ eine Menge von $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätzen, sei $k \geqslant 1$, sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion, und sei $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ eine $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel, so dass gilt:

(1.1) Für alle $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) = n$ gilt: $T \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \ \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_1) \land \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_2) \big) \to y_1{=}y_2 \Big).$$

Zeigen Sie, dass dann auch Folgendes gilt:

(1.2) Für alle $m_1, \dots, m_k, n' \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) \neq n'$ gilt: $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n'})$.

Frage: An welcher Stelle benutzt Ihr Beweis, dass $T \supseteq Q$ ist?