Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

11. Dezember 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis 18. Dezember 2024

Aufgabe 1: (7 + 18 = 25 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Gödelnummern der σ_{Ar}-Terme $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ und $\underline{3}$.

(b) Beweisen Sie Lemma 3.11(c), d.h.:
Sei Φ eine entscheidbare Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätzen und sei $\varphi(x)$ eine $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel.

Behauptung: Falls f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Phi \models \varphi\frac{n}{x} \quad \text{oder} \quad \Phi \models \neg\varphi\frac{n}{x}\ ,$$

dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \Phi \models \varphi\frac{n}{x}\}$ entscheidbar.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Beweisen Sie Behauptung 5 aus dem Beweis von Lemma 3.15, d.h. zeigen Sie, dass die wie folgt definierte Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bijektiv ist.

$$g(y_1, y_2) \quad := \quad \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 1)(y_1 + y_2) + y_2\ , \qquad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Definition: Die Menge Σ_1 besteht aus allen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei x eine Variable und φ eine Δ_0-Formel ist.

Definition: Für zwei $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln ψ und ψ' schreiben wir $\psi \equiv_{\leqslant\text{-ord}} \psi'$, falls für jede σ_{Ar}-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, für die $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist, gilt: $\mathcal{I} \models \psi \iff \mathcal{I} \models \psi'$.

Seien φ_1 und φ_2 zwei Formeln in Σ_1.
Zeigen Sie, dass es Σ_1-Formeln $\varphi_\wedge$ und $\varphi_\vee$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi_\vee \ \equiv_{\leqslant\text{-ord}}\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \text{und} \qquad \varphi_\wedge \ \equiv_{\leqslant\text{-ord}}\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Betrachten Sie Turingmaschinen (siehe Abschnitt 3.3.2 im Skript), deren Zustandsmengen endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind.

Geben Sie eine geeignete Gödelisierung für solche Turingmaschinen an. D.h. geben Sie eine berechenbare, injektive Funktion $\langle\cdot\rangle$ an, die jeder solchen Turingmaschine M eine natürliche Zahl $n_M := \langle M\rangle$ zuordnet.