Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. November 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis 4. Dezember 2024

Aufgabe 1: **($15 + 20 = 35$ Punkte)**

Beweisen Sie Bemerkung 2.17, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Dann gilt:

(a) Ist $\mathcal{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$.

Hinweis: Nutzen Sie hierfür den aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem benutzen.

(b) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$: $\quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Hinweis: Sie können folgendermaßen vorgehen: Zeigen Sie zunächst, dass die Aussage für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus die Aussage für beliebige Signaturen.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Sei $\mathcal{B}$ ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik.
Zeigen Sie: Zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathcal{B}$ liegt eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.

Aufgabe 3: **($5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$ Punkte)**

Sei A ein endliches Alphabet. Für eine Menge $L \subseteq A^*$ sei $\bar{L} := A^* \setminus L$.

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

(b) Jede entscheidbare Menge $L \subseteq A^*$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch $\bar{L}$ semi-entscheidbar sind.

(d) Wenn eine Menge $L \subseteq A^*$ semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist, dann ist $\bar{L}$ nicht semi-entscheidbar.

(e) Sind $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ rekursiv aufzählbare Mengen, so ist auch die Menge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 3.8, d.h. zeigen Sie, dass die in Def. 3.6 und Def. 3.7 eingeführte Kodierung alle Eigenschaften aus Annahme 3.1 besitzt.