Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. November 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis 28. November 2024

Aufgabe 1: **($8 + 8 + 8 + 8 = 32$ Punkte)**

Entscheiden Sie für jede der folgenden Klassen, ob sie

- endlich axiomatisierbar,
- erststufig axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar, oder
- nicht erststufig axiomatisierbar

ist und beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(a) Die Klasse aller azyklischen, (endlichen oder unendlichen,) gerichteten Graphen.

(b) Die Klasse aller nicht azyklischen, (endlichen oder unendlichen,) gerichteten Graphen.

(c) Die Klasse aller endlichen, azyklischen, gerichteten Graphen.

(d) Die Klasse aller endlichen, nicht azyklischen, gerichteten Graphen.

Zur Erinnerung: Ein (endlicher oder unendlicher) gerichteter Graph ist *azyklisch*, falls er keinen gerichteten Kreis endlicher Länge[1] enthält.

Aufgabe 2: **($12 + 22 = 34$ Punkte)**

Seien A und B zwei Mengen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Für jede Menge A gibt es eine Menge B mit $A \prec B$ (d.h. es gibt eine injektive Funktion von A nach B, aber keine bijektive).

(b) Für alle Mengen A und B mit $A \preccurlyeq B$ und $B \preccurlyeq A$ ist $A \sim B$. Das heißt, falls es Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ gibt, die jeweils injektiv sind, dann gibt es eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.

Aufgabe 3: **($22 + 12 = 34$ Punkte)**

(a) Beweisen Sie den absteigenden Satz von Löwenheim und Skolem (Satz 2.15).

Hinweis: Aus der Mengenlehre wissen wir, dass die Vereinigung abzählbar vieler, gleichmächtiger, unendlicher Mengen dieselbe Mächtigkeit hat, d.h. es gilt: Sei $I \subseteq \mathbb{N}$, so dass $0 \in I$, und S_i unendliche Mengen für alle $i \in I$. Dann gilt: Falls $S_0 \sim S_i$ für alle $i \in I$, dann ist $S_0 \sim \bigcup_{i \in I} S_i$.

(b) Gilt auch die verschärfte Variante des absteigenden Satzes von Löwenheim und Skolem, die besagt, dass die Mächtigkeit des Modells höchstens so groß wie die Mächtigkeit von Φ ist?

[1] Ein Kreis ist eine Folge von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Knoten $v_0, \dots, v_n$, sodass sowohl $v_0 = v_n$ als auch v_{i-1} eine Kante nach v_i für alle $i \in [n]$ hat.