Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

6. November 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis 13. November 2024

Aufgabe 1: **$(10 + (15 + 15) = 40$ Punkte)**

(a) Betrachten Sie den Beweis des Satzes von Henkin.
Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin aus.

(b) Zeigen Sie Folgendes (wobei σ eine geeignete Signatur sei, die mindestens ein Relationssymbol enthält):

(i) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Theta \subseteq \text{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Theta] \not\models \Theta$.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\, \exists v_0\, P(v_0) \,\} \cup \{\, \neg P(t) \ :\ t \in T_\sigma \,\}$

(ii) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Psi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Psi] \not\models \Psi$.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass im Satz von Henkin die beiden Forderungen, dass Φ negationstreu ist und Beispiele enthält, unverzichtbar sind.

Aufgabe 2: **$(10 + 20 = 30$ Punkte)**

Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \quad := \quad \{\ v_0 = t \ :\ t \in T_\sigma \ \} \ \cup \ \{\ \exists v_0\, \exists v_1\, \neg\, v_0{=}v_1 \ \}.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass in Lemma 1.39 die Forderung, dass $|\mathsf{VAR} \setminus \text{frei}(\Phi)| = \infty$ ist, unverzichtbar ist.

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

Arbeiten Sie die Details im Beweis von Lemma 1.41 aus. D.h. arbeiten Sie die Details für $\mathcal{I}' \models \varphi'$ in Abschnitt (b) des Beweises sowie die fehlenden Details in Abschnitt (c) des Beweises aus.