Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. Oktober 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis 6. November 2024

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei M eine Menge und sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über M.

Eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ über M heißt *in $\mathfrak{K}$ ableitbar*, wenn $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(\{a_1, \dots, a_n\})$ gilt.

Zwei Kalküle $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ über M heißen *gleich stark*, wenn für alle $V \subseteq M$ gilt:
Die Menge der aus V in $\mathfrak{K}_1$ ableitbaren Elemente ist gleich der Menge der aus V in $\mathfrak{K}_2$ ableitbaren Elemente. D.h. $\text{abl}_{\mathfrak{K}_1}(V) = \text{abl}_{\mathfrak{K}_2}(V)$.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \dots, a_n, b \in M$ gilt:

$$\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b} \text{ ist genau dann in } \mathfrak{K} \text{ ableitbar, wenn } \mathfrak{K} \text{ und } \mathfrak{K} \cup \left\{ \dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b} \right\} \text{ gleich stark sind.}$$

Aufgabe 2: **(25 + 20 = 45 Punkte)**

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

(a) Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\begin{aligned} \Phi \quad := \quad & \{\, v_i = v_{i+2} \;:\; i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \,\} \\ & \cup \;\{\; E(v_0, v_7),\; E(v_1, v_4),\; E(v_6, v_0),\; \forall v_1 \forall v_3 \big(E(v_1, v_3) \to E(v_3, v_1) \big) \;\}\,. \end{aligned}$$

(b) Sei $\Psi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ widerspruchsvoll. Wie sieht die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Psi]$ aus?

Aufgabe 3: **(15 + 15 = 30 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 1.36, d.h. zeigen Sie, dass für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ gilt:

(a) $[\![t]\!]^{[\mathcal{I}_\Phi]} = [t]_\Phi$ für alle $t \in T_\sigma$ und

(b) $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ für alle **atomaren** $\text{FO}[\sigma]$-Formeln φ