Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

23. Oktober 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis 30. Oktober 2024

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 0.42 (Substitutitonslemma für Formeln) aus der Vorlesung. D.h., zeigen Sie:

> Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{var}(\mathcal{S}) \subseteq \text{Def}(\beta)$. Für alle FO[$\sigma$]-Formeln φ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{Def}(\beta) \cup \text{Def}(\mathcal{S})$ gilt:
>
> $$\mathcal{I} \models \varphi\mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}\mathcal{S} \models \varphi$$

Sie können hierfür Lemma 0.38 (Substitutitonslemma für Terme) als bewiesen voraussetzen.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Geben Sie eine Ableitung der Regel $\dfrac{\Gamma,\ \varphi,\ \psi \quad \vdash \quad \chi}{\Gamma \quad \vdash \quad \big((\varphi \wedge \psi) \to \chi\big)}$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ an.

Zur Erinnerung: Im Rahmen des Vollständigkeitssatzes betrachten wir Formeln der Art $(\varphi \to \psi)$ stets als abkürzende Schreibweise für die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$, d.h. $\big((\varphi \wedge \psi) \to \chi\big)$ steht hier für die Formel $\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\big)$.

Aufgabe 3: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Leiten Sie die folgenden Sequenzen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ab. Hierbei sind x, y, z paarweise verschiedene Elemente aus VAR.

(a) $\forall x\ f(x,x){=}x \quad \vdash \quad \forall x\ \big(P(x)\ \vee\ \neg P(f(x,x))\big)$

(b) $\forall x\ \forall y\ \forall z\big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\big)\ \wedge\ \forall x\ \neg R(x,x) \quad \vdash \quad \forall x\ \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))$

Beachte: Auch hier stehen Formeln der Form $(\varphi \to \psi)$ für $(\neg\varphi \vee \psi)$.

Aufgabe 4: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Betrachten Sie die Regel

$$(\forall\exists) \quad \dfrac{}{\Gamma,\ \exists x\,\varphi \quad \vdash \quad \forall x\,\varphi}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ korrekt ist.

(b) Sei $\mathfrak{K}'_S$ der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob *jede* Sequenz in $\mathfrak{K}'_S$ ableitbar ist.

Hinweis: Sie können für diese Aufgabe den Vollständigkeitssatz als gegeben nehmen.