Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Logik als “Fundament der Mathematik”

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Ansatz: Rückführung der Mathematik auf *Arithmetik und Mengenlehre*

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Ansatz: Rückführung der Mathematik auf *Arithmetik und Mengenlehre*

Zwei Kernfragen:

(1) Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Ansatz: Rückführung der Mathematik auf *Arithmetik und Mengenlehre*

Zwei Kernfragen:

(1) Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?

(2) Gibt es ein Verfahren, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist?

Zwei Kernfragen:

(1) Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?

(2) Gibt es ein Verfahren, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist?

Zwei Kernfragen:

(1) Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?

(2) Gibt es ein Verfahren, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist?

Beachte: Es gilt (1) $\Longrightarrow$ (2)

Zwei Kernfragen:

(1) Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?

(2) Gibt es ein Verfahren, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist?

Beachte: Es gilt (1) $\Longrightarrow$ (2)

Eine andere Formulierung des *Entscheidungsproblems* (2) ist das *Allgemeingültigkeitsproblem* — hier für die Logik erster Stufe:

ALLGEMEINGÜLTIGKEITSPROBLEM DER LOGIK ERSTER STUFE

Eingabe: Eine Formel ϕ der Logik erster Stufe

Frage: Gilt für alle zu ϕ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt ϕ?

Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe

Eingabe: Eine Formel ϕ der Logik erster Stufe
Frage: Gilt für alle zu ϕ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$:
$\mathcal{I}$ erfüllt ϕ?

Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe

Eingabe: Eine Formel ϕ der Logik erster Stufe

Frage: Gilt für alle zu ϕ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt ϕ?

Beispiel

Sei ϕ die Formel

$$\forall x\, \exists y\, \exists z \Big(x \leq y \ \wedge\ z = y + \underline{1} + \underline{1} \ \wedge\ \forall u \forall v \Big(\big(u \cdot v = y \ \vee\ u \cdot v = z\big) \ \rightarrow\ \big(u = \underline{1} \ \vee\ v = \underline{1}\big)\Big)\Big).$$

Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe

Eingabe:	Eine Formel ϕ der Logik erster Stufe
Frage:	Gilt für alle zu ϕ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt ϕ?

Beispiel

Sei ϕ die Formel

$$\forall x\, \exists y\, \exists z \Big(\; x \leq y \;\wedge\; z = y + \underline{1} + \underline{1} \;\wedge\; \forall u\, \forall v \Big(\big(u \cdot v = y \;\vee\; u \cdot v = z \big) \;\rightarrow\; \big(u = \underline{1} \;\vee\; v = \underline{1} \big) \Big) \Big).$$

Beachte

ϕ besagt "es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge".

Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe

Eingabe: Eine Formel ϕ der Logik erster Stufe

Frage: Gilt für alle zu ϕ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt ϕ?

Beispiel

Sei ϕ die Formel

$$\forall x\, \exists y\, \exists z \Big(\; x \leq y \;\wedge\; z = y + \underline{1} + \underline{1} \;\wedge\; \forall u\, \forall v \Big(\big(u \cdot v = y \;\vee\; u \cdot v = z \big) \;\rightarrow\; \big(u = \underline{1} \;\vee\; v = \underline{1} \big) \Big) \Big).$$

Beachte

ϕ besagt "es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge".

Der Nachweis, dass die Formel ϕ in der Arithmetik der natürlichen Zahlen erfüllt ist, würde also ein berühmtes offenes Problem aus der Zahlentheorie lösen, nämlich die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*“Logik für Penible”*)

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*"Logik für Penible"*)

(2) Automatisierung des Beweisens (*"Logik für Faule"*)

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*“Logik für Penible”*)

(2) Automatisierung des Beweisens (*“Logik für Faule”*)

Zwei “Spielverderber”:

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*“Logik für Penible”*)

(2) Automatisierung des Beweisens (*“Logik für Faule”*)

Zwei “Spielverderber”:

(1) *Kurt Gödel (1931)*

+ : jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (*Vollständigkeitssatz*)

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*"Logik für Penible"*)

(2) Automatisierung des Beweisens (*"Logik für Faule"*)

Zwei "Spielverderber":

(1) *Kurt Gödel (1931)*

- $+$: jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (*Vollständigkeitssatz*)
- $-$: in der Arithmetik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind (*Unvollständigkeitssatz*)
- $\Rightarrow$ Hilberts (1) funktioniert nicht!

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*"Logik für Penible"*)

(2) Automatisierung des Beweisens (*"Logik für Faule"*)

Zwei "Spielverderber":

(1) *Kurt Gödel (1931)*
   - $+$: jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (*Vollständigkeitssatz*)
   - $-$: in der Arithmetik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind (*Unvollständigkeitssatz*)
   - $\Rightarrow$ Hilberts (1) funktioniert nicht!

(2) *Alan Turing (1936)*
   - $+$: Der Begriff "automatisch entscheiden" lässt sich einfach und sauber definieren
     (*Turingmaschine*)

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*"Logik für Penible"*)

(2) Automatisierung des Beweisens (*"Logik für Faule"*)

Zwei "Spielverderber":

(1) *Kurt Gödel (1931)*

- $+$: jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (*Vollständigkeitssatz*)
- $-$: in der Arithmetik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind (*Unvollständigkeitssatz*)
- $\Rightarrow$ Hilberts (1) funktioniert nicht!

(2) *Alan Turing (1936)*

- $+$: Der Begriff "automatisch entscheiden" lässt sich einfach und sauber definieren
  (*Turingmaschine*)
- $-$: Für die Arithmetik gibt es kein automatisches Verfahren — sie ist unentscheidbar
- $\Rightarrow$ Hilberts (2) funktioniert nicht!

Logik und Mathematik: Geschichte

um 325 v. Chr.:	• Aristoteles: Syllogismen • Euklid: Versuch einer Axiomatisierung der Geometrie
um 1700:	Leibniz formuliert das Ziel einer universellen Sprache zur Formulierung aller mathematischen Aussagen und eines Kalküls zur Herleitung aller wahren Aussagen.
um 1850:	Axiomatisierung der Analysis
1854:	Boole: Formalisierung der Aussagenlogik
1879:	Frege: Formalisierung der Logik erster Stufe
um 1880:	Cantorsche Mengenlehre, Rückführung der Analysis und Arithmetik auf die Mengenlehre
um 1900:	Antinomien: Cantorsche Mengenlehre führt zu Widersprüchen (vgl. die *Russellsche Antinomie* zur *“Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthält”*)
	$\Longrightarrow$ Notwendigkeit einer neuen Grundlegung der Mathematik/Mengenlehre

Logik und Mathematik: Geschichte (cont.)

um 1900:	Hilberts Programm. Ziel: ▶ Formalisierung der Mathematik ▶ Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik
um 1910:	Russel, Whitehead: Mengenlehre mit Typen
um 1920:	Zermelo, Fraenkel: Axiomatische Mengenlehre
1930:	Gödels Vollständigkeitsatz
1931:	*Gödels Unvollständigkeitsätze*
1936:	*Church/Turing*: Es gibt kein Programm, das für alle mathematischen Aussagen entscheidet, ob sie wahr oder falsch sind.

Logik in der Informatik

Anwendungsbereiche der Logik in der Informatik

- Logische Programmierung
- automatisches Beweisen
- Programm-Verifikation
- *Model Checking* (automatische Verifikation)
- *Logik als Datenbank-Anfragesprache*

Model Checking

Zwei Beispiele zur Motivation:

(1) Der Pentium-Fehler

Pentium-Prozessor (1993):

- Zur Effizienz-Steigerung der Division wurden Wertetabellen verwendet.
- ABER: 5 Einträge waren falsch!
  $\rightsquigarrow$ ca. 1 Fehler je 9 Milliarden Divisionen
  ($\Rightarrow$ Fehler durch "Testen" nicht leicht zu finden)

Kosten: ca. 475 Millionen US-Dollar

Intel hat danach viele Experten für automatische Verifikation gesucht!

Model Checking

Zwei Beispiele zur Motivation:

(1) <u>Der Pentium-Fehler</u>

Pentium-Prozessor (1993):

- Zur Effizienz-Steigerung der Division wurden Wertetabellen verwendet.
- ABER: 5 Einträge waren falsch!

  $\leadsto$ ca. 1 Fehler je 9 Milliarden Divisionen

  ($\Rightarrow$ Fehler durch "Testen" nicht leicht zu finden)

Kosten: ca. 475 Millionen US-Dollar

Intel hat danach viele Experten für automatische Verifikation gesucht!

(2) <u>Die Ariane 5-Rakete</u> (1996)

Messwerte wurden von 64-Bit-Zahlen in 16-Bit-Zahlen umgewandelt.

- Das hatte bei Ariane 4 gut funktioniert
- ABER: aufgrund der technischen Änderungen waren die Werte bei Ariane 5 größer als erwartet

  $\leadsto$ Überlauf! Das System schaltete sich ab und die Rakete stürzte ab.

Kosten: ca. 370 Millionen US-Dollar

Prinzip der automatischen Verifikation

(1) Modelliere das zu testende System durch ein *Transitionssystem* $\mathcal{T}$ (eine bestimmte logische Struktur; ein beschrifteter Graph).

(2) Drücke die (erwünschte oder unerwünschte) Systemeigenschaft durch eine Formel ϕ einer geeigneten Logik aus.

(3) Teste, *ob* $\mathcal{T}$ *die Formel* ϕ *erfüllt*.

Logik als Grundlage für Datenbank-Anfragesprachen

<u>Grundprinzip:</u>

- Datenbank $\widehat{=}$ logische Struktur $\mathcal{A}$
- Anfrage $\widehat{=}$ Formel ϕ einer geeigneten Logik
- Auswerten der Anfrage auf der Datenbank $\widehat{=}$ Testen, ob "$\mathcal{A}$ erfüllt ϕ" gilt

Details:
Vorlesungen *Logik in der Informatik* und *Einführung in die Datenbanktheorie* .

In dieser Vorlesung