Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Vorlesung (entspricht 4V+2Ü SWS)

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Lehrstuhl Theoretische Informatik / Logik in der Informatik
Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Version vom 19. Dezember 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

0.1 Einführung ins Thema

Folie 1

Logik als "Fundament der Mathematik"

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Ansatz: Rückführung der Mathematik auf **Arithmetik und Mengenlehre**

Zwei Kernfragen:

1. Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?
2. Gibt es ein Verfahren, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist?

Beachte: Es gilt (1) $\Longrightarrow$ (2)

Folie 2

Eine andere Formulierung des **Entscheidungsproblems** (2) ist das **Allgemeingültigkeitsproblem** — hier für die Logik erster Stufe:

ALLGEMEINGÜLTIGKEITSPROBLEM DER LOGIK ERSTER STUFE

Eingabe: Eine Formel φ der Logik erster Stufe

Frage: Gilt für alle zu φ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt φ?

Beispiel: Sei φ die Formel

$$\forall x\,\exists y\,\exists z\,\Big(\ x \leqslant y\ \wedge\ z = y+1+1\ \wedge \\ \forall u\,\forall v\,\Big(\big(u\cdot v = y\ \vee\ u\cdot v = z\big)\ \to\ \big(u = 1\ \vee\ v = 1\big)\Big)\Big).$$

Beachte: φ besagt "es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge".

Der Nachweis, dass die Formel φ in der Arithmetik der natürlichen Zahlen erfüllt ist, würde also ein berühmtes offenes Problem aus der Zahlentheorie lösen, nämlich die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

1. Präzisierung von Aussagen (*"Logik für Penible"*)
2. Automatisierung des Beweisens (*"Logik für Faule"*)

Folie 3

Zwei "Spielverderber":

1. **Kurt Gödel (1931)**
   - $+$: jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (**Vollständigkeitssatz**)
   - $-$: in der Arithmetik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind (**Unvollständigkeitssatz**)
   - $\Rightarrow$ Hilberts (1) funktioniert nicht!
2. **Alan Turing (1936)**
   - $+$: Der Begriff "automatisch entscheiden" lässt sich einfach und sauber definieren (**Turingmaschine**)
   - $-$: Für die Arithmetik gibt es kein automatisches Verfahren — sie ist unentscheidbar
   - $\Rightarrow$ Hilberts (2) funktioniert nicht!

Logik und Mathematik: Geschichte

um 325 v. Chr.:	• Aristoteles: Syllogismen • Euklid: Versuch einer Axiomatisierung der Geometrie
um 1700:	Leibniz formuliert das Ziel einer universellen Sprache zur Formulierung aller mathematischen Aussagen und eines Kalküls zur Herleitung aller wahren Aussagen.
um 1850:	Axiomatisierung der Analysis
1854:	Boole: Formalisierung der Aussagenlogik
1879:	Frege: Formalisierung der Logik erster Stufe
um 1880:	Cantorsche Mengenlehre, Rückführung der Analysis und Arithmetik auf die Mengenlehre
um 1900:	Antinomien: Cantorsche Mengenlehre führt zu Widersprüchen (vgl. die **Russellsche Antinomie** zur *“Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthält”*) $\Longrightarrow$ Notwendigkeit einer neuen Grundlegung der Mathematik/Mengenlehre
um 1900:	Hilberts Programm. Ziel: • Formalisierung der Mathematik • Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik
um 1910:	Russel, Whitehead: Mengenlehre mit Typen
um 1920:	Zermelo, Fraenkel: Axiomatische Mengenlehre
1930:	Gödels Vollständigkeitsatz
1931:	**Gödels Unvollständigkeitsätze**
1936:	**Church/Turing**: Es gibt kein Programm, das für alle mathematischen Aussagen entscheidet, ob sie wahr oder falsch sind.

Folie 4

Logik in der Informatik

Anwendungsbereiche der Logik in der Informatik

- Logische Programmierung
- Automatisches Beweisen
- Programm-Verifikation
- **Model Checking** (automatische Verifikation)
- **Logik als Datenbank-Anfragesprache**

Folie 5

Model Checking

Zwei Beispiele zur Motivation:

1. Der Pentium-Fehler

   Pentium-Prozessor (1993):

   - Zur Effizienz-Steigerung der Division wurden Wertetabellen verwendet.
   - ABER: 5 Einträge waren falsch!
     $\rightsquigarrow$ ca. 1 Fehler je 9 Milliarden Divisionen

   ($\Rightarrow$ Fehler durch “Testen” nicht leicht zu finden)

   Kosten: ca. 475 Millionen US-Dollar
   Intel hat danach viele Experten für automatische Verifikation gesucht!

2. Die Ariane 5-Rakete (1996)

   Messwerte wurden von 64-Bit-Zahlen in 16-Bit-Zahlen umgewandelt.

   - Das hatte bei Ariane 4 gut funktioniert.
   - ABER: aufgrund der technischen Änderungen waren die Werte bei Ariane 5 größer als erwartet
     $\rightsquigarrow$ Überlauf! Das System schaltete sich ab und die Rakete stürzte ab.

Kosten: ca. 370 Millionen US-Dollar

Folie 6

Prinzip der automatischen Verifikation

1. Modelliere das zu testende System durch ein **Transitionssystem** $\mathcal{T}$ (eine bestimmte logische Struktur; ein beschrifteter Graph).
2. Drücke die (erwünschte oder unerwünschte) Systemeigenschaft durch eine Formel φ einer geeigneten Logik aus.
3. Teste, **ob $\mathcal{T}$ die Formel φ erfüllt**.

Folie 7

Logik als Grundlage für Datenbank-Anfragesprachen

Grundprinzip:

- Datenbank $\widehat{=}$ logische Struktur $\mathcal{A}$
- Anfrage $\widehat{=}$ Formel φ einer geeigneten Logik
- Auswerten der Anfrage auf der Datenbank $\widehat{=}$ Testen, ob "$\mathcal{A}$ erfüllt φ" gilt

Details: Vorlesungen *Logik in der Informatik* [Sch16b] und *Einführung in die Datenbanktheorie* [Sch16a].

0.2 Syntax und Semantik der Logik erster Stufe

Abschnitt 0.2 rekapituliert Schreibweisen und Definitionen zur Syntax und Semantik der Logik erster Stufe, die aus der Vorlesung *Logik in der Informatik* [Sch16b] weitgehend bekannt sein sollten.

0.2.1 Strukturen

Folie 8

Die Objekte, über die Formeln der Logik erster Stufe Aussagen treffen können, heißen **Strukturen**. Viele Objekte lassen sich auf natürliche Weise durch solche Strukturen repräsentieren, beispielsweise

- Graphen $G = (V, E)$ oder Bäume $B = (V, E)$,
- die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$,
- die reellen Zahlen mit Addition, Multiplikation und Konstanten 0 und 1: $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$,
- relationale Datenbanken.

Die im Folgenden definierten **Signaturen** legen den "Typ" (bzw. das "Format") der entsprechenden Strukturen fest.

Folie 9

Definition 0.1.

Signatur, Vokabular

Eine **Signatur** (auch **Symbolmenge** bzw. **Vokabular**) ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und/oder Konstantensymbolen. Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine **Stelligkeit** (bzw. **Arität**, engl. arity)

Stelligkeit

$\mathrm{ar}(R)$, $\mathrm{ar}(f)$

$$\mathrm{ar}(R) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{ar}(f) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}.$$

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$

Wir benutzen hier folgende Notation: $\mathbb{N} := \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ und $\mathbb{N}_{\geqslant 1} := \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

Folie 10

Notation 0.2.

- Der griechische Buchstabe σ bezeichnet in diesem Vorlesungsskript stets eine Signatur.
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie $R, P, E, Q, R_1, R_2, \ldots$.
- Für Funktionssymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$.
- Für Konstantensymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $c, d, c_1, c_2, \ldots$.
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\leqslant$ (2-stelliges Relationssymbol) bzw. $+, \cdot$ (2-stellige Funktionssymbole), und als Konstantensymbole Zahlen wie 0, 1.

- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie unter das Symbol schreiben.

  Beispiel: Die Notation $\underset{2}{R}$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Folie 11

Definition 0.3.
Eine **σ-Struktur** (bzw. Struktur über σ) $\mathcal{A}$ besteht aus

σ-Struktur

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten **Universum** (bzw. Träger, Grundbereich; engl. domain) von $\mathcal{A}$ und folgenden Komponenten:

Universum

- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ eine ar(R)-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$,
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ eine Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$,
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ein Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Folie 12

Notation 0.4.

- Strukturen bezeichnen wir meistens mit kalligraphischen Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{G}, \ldots$; das Universum der Strukturen durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben $A, B, G, \ldots$.
- Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, so schreiben wir oft $\mathcal{A} = (A, (S^{\mathcal{A}})_{S\in\sigma})$, um die Komponenten von $\mathcal{A}$ anzugeben. Falls σ endlich und von der Form

  $$\sigma \ = \ \{ \, R_1, \ldots R_k, f_1, \ldots, f_\ell, c_1, \ldots, c_m \, \}$$

  ist, so schreiben wir auch

  $$\mathcal{A} \ = \ \big(\, A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots R_k^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_\ell^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_m^{\mathcal{A}} \, \big) \, ,$$

  um eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ zu bezeichnen.

Folie 13

Beispiel 0.5 (Arithmetische Strukturen)**.**
Sei $\sigma_{\text{Ar}} := \{\leqslant, +, \cdot, 0, 1\}$, wobei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, $+, \cdot$ zwei 2-stellige Funktionssymbole und $0, 1$ zwei Konstantensymbole sind.

Standardmodell der Arithmetik, $\mathcal{N}$

(a) Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} \;:=\; \mathcal{A}_{\mathbb{N}} \;:=\; (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}),$$

wobei $\leqslant^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist, $+^{\mathcal{N}}$ und $\cdot^{\mathcal{N}}$ die Addition bzw. die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $0^{\mathcal{N}}$ bzw. $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 bzw. 1 sind.

$\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$

(b) Entsprechend können wir σ_{Ar}-Strukturen $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ mit Universum $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ definieren.

Folie 14

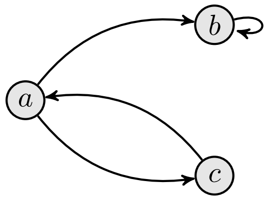
Beispiel 0.6 (Graphen und Bäume)**.**
Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Jeder gerichtete Graph bzw. gerichtete Baum (V, E) (mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$) lässt sich als σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit

- Universum $A := V$ und
- Relation $E^{\mathcal{A}} := E$

auffassen.

Beispiel:

Graph:



zugehörige σ_{Graph}-Struktur:

$\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit

- $A = \{a, b, c\}$
- $E^{\mathcal{A}} = \{(a, b), (b, b), (a, c), (c, a)\}$

Folie 15

Isomorphie

Frage: Wann sind zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ “prinzipiell gleich” (Fachbegriff: isomorph)?

Antwort: Falls $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathcal{A}$ umbenennt. Analog zum Begriff der Isomorphie von Graphen wird dies durch folgende Definition präzisiert:

Folie 16

Definition 0.7.
Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein **Isomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

Isomorphismus

(a) π ist bijektiv.

(b) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$

(c) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k)\right) \;=\; f^{\mathcal{B}}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big).$$

(d) Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gilt:

$$\pi\left(c^{\mathcal{A}}\right) \;=\; c^{\mathcal{B}}.$$

Folie 17

Notation:
Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ um auszudrücken, dass π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

$\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

Definition 0.8.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind **isomorph** (kurz: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es einen Isomorphismus π von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

isomorph
$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

Folie 18

Satz 0.9.
*Isomorphie ($\cong$) ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Klasse aller σ-Strukturen, d.h. für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gilt:*

(a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ (Reflexivität).

(b) Falls $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, so auch $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ (Symmetrie).

(c) Falls $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, so auch $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ (Transitivität).

Beweis: Übung.

□

0.2.2 Syntax der Logik erster Stufe

Folie 19

Bestandteile:

- aussagenlogische Junktoren

$\neg$,	$\wedge$,	$\vee$,	$\rightarrow$
„nicht“	„und“	„oder“	„wenn ..., dann“

- Variablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ um Elemente aus dem Universum einer Struktur zu bezeichnen
- Quantoren: $\exists$ (“es existiert”), $\forall$ (“für alle”)
- Symbole für Elemente aus der Signatur σ

Präzise:

Folie 20

Definition 0.10 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe)**.**

Variable
VAR

(a) Eine **Individuenvariable** (kurz: **Variable**) hat die Form v_i, für $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR. D.h.

$$\mathsf{VAR} \ := \ \{\, v_i \ : \ i \in \mathbb{N} \,\} \ = \ \{v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots\}.$$

(b) Sei σ eine Signatur. Das Alphabet $A_{\text{FO}[\sigma]}$ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

$A_{\text{FO}[\sigma]}$

- den Variablen in VAR
- den Symbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol[1] $=$
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- den Klammern (,)
- dem Komma ,

Existenzquantor
Allquantor

D.h.:

$$A_{\text{FO}[\sigma]} \;=\; \mathsf{VAR} \cup \sigma \cup \{\exists, \forall\} \cup \{=\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \cup \{(,)\} \cup \{,\}.$$

Folie 21

Notation:
$A^*_{\text{FO}[\sigma]}$ bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über $A_{\text{FO}[\sigma]}$.

$A^*_{\text{FO}[\sigma]}$

Definition 0.11 (Terme der Logik erster Stufe)**.**
Sei σ eine Signatur. Die Menge T_σ aller **σ-Terme** ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\text{FO}[\sigma]}$:

T_σ
σ-Terme

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ ist $x \in T_\sigma$.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jedes k-stellige Funktionssymbol $f \in \sigma$ gilt: Sind $t_1 \in T_\sigma, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k) \in T_\sigma$.

Folie 22

Definition 0.12 (Formeln der Logik erster Stufe)**.**
Sei σ eine Signatur. Die Menge **FO**$[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: **FO**$[\sigma]$**-Formeln**; „FO“ steht für die englische Bezeichnung **first-order logic**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\text{FO}[\sigma]}$:

FO$[\sigma]$
first-order logic

---

[1] Manche Bücher schreiben $\equiv$ an Stelle von $=$

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 gilt
$$t_1 = t_2 \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma].$$
- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \dots, t_k$ gilt:
$$R(t_1, \dots, t_k) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma].$$

atomare Formeln

$\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln der Form $t_1 = t_2$ bzw. $R(t_1, \dots, t_k)$ heißen auch **atomare Formeln**.

Folie 23

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist auch
  - $(\varphi \wedge \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \vee \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \mathsf{VAR}$, so ist auch
  - $\exists x \ \varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $\forall x \ \varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.

Bemerkung:

- In manchen Büchern wird $\mathrm{FO}[\sigma]$ auch mit L_σ bzw. L^σ bezeichnet, und $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln werden auch **σ-Ausdrücke** genannt.

Folie 24

Beispiel 0.13.

(a) Sei $\sigma = \{ \underset{2}{f}, c \}$. Folgende Worte sind $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln:

- $f(v_0, v_1) = c$
- $\forall v_2 \ f(v_2, c) = v_2$

- $\neg\,\exists v_3\ (f(v_2,v_3) = v_3\ \wedge\ \neg\, v_3 = c)$

Folgende Worte sind keine FO[σ]-Formeln:

- $(f(v_0,v_1) = c)$
- $f(v_0,v_1)$ (dies ist ein σ-Term, aber keine FO[σ]-Formel)
- $(\forall v_2\ (f(v_2,c) = v_2))$
- $\exists c\ f(v_0,c) = v_0$

Folie 25

(b) Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{\underset{2}{E}\}$. Folgendes ist eine FO[$\sigma_{\text{Graph}}$]-Formel:

$$\forall v_0\,\forall v_1\ \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big)\ \rightarrow\ v_0 = v_1\Big).$$

Intuition zur Semantik (die formale Definition der Semantik wird auf den nächsten Seiten angegeben):
In einem gerichteten Graphen $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ sagt die Formel

$$\forall v_0\,\forall v_1\ \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big)\ \rightarrow\ v_0 = v_1\Big)$$

Folgendes aus:

„Für alle Knoten $a_0 \in A$ und für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:

Falls $(a_0,a_1) \in E^{\mathcal{A}}$ und $(a_1,a_0) \in E^{\mathcal{A}}$, so ist $a_0 = a_1$“.

Die Formel sagt in einem Graphen $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ also gerade aus, dass die Kantenrelation **antisymmetrisch** ist. Ein Graph $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ **erfüllt** die Formel genau dann, wenn die Kantenrelation $E^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

Folie 26

Notation 0.14.

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$.
- Formeln bezeichnen wir meistens mit griechischen Kleinbuchstaben $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
  Formel**mengen** mit griechischen Großbuchstaben $\Phi, \Psi, \ldots$. Formelmengen

Bindungsregeln

- Bezüglich Klammerung verwenden wir folgende Bindungsregeln:
  (a) $\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren.
  (b) $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg. D.h. wir schreiben z.B. $\varphi \wedge \psi \ \rightarrow \ \chi$ an Stelle von $((\varphi \wedge \psi) \ \rightarrow \ \chi))$.
- Bei Termen und atomaren Formeln schreiben wir manchmal
  - $Rt_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $R(t_1, \ldots, t_k)$,
  - $ft_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $f(t_1, \ldots, t_k)$.

Folie 27

Infixschreibweise

- Für gewisse 2-stellige Funktionssymbole wie $+, \cdot \in \sigma_{\text{Ar}}$ und gewisse 2-stellige Relationssymbole wie $\leqslant$ verwenden wir **Infix- statt Präfixschreibweise** und setzen Klammern dabei auf natürliche Weise, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.

  Beispiel:

  - An Stelle des (formal korrekten) Terms $\cdot(+(v_1, v_2), v_3)$ schreiben wir $(v_1 + v_2) \cdot v_3$.
  - An Stelle der (formal korrekten) atomaren Formel $\leqslant(v_1, v_2)$ schreiben wir $v_1 \leqslant v_2$.

0.2.3 Semantik der Logik erster Stufe

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Notationen:

Folie 28

sub(φ)
Subformeln
Teilformeln

Definition 0.15 (Subformeln bzw. Teilformeln).
Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{sub}(\varphi) \subseteq \text{FO}[\sigma]$ aller **Subformeln** (oder: **Teilformeln**) von φ wie folgt:

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\}$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ für eine FO[σ]-Formel ψ, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \text{sub}(\psi)$.

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ für $* \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$ und FO$[\sigma]$-Formeln ψ_1 und ψ_2, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{ \varphi \} \cup \text{sub}(\psi_1) \cup \text{sub}(\psi_2)$.
- Ist φ von der Form $Qx\ \psi$ für $Q \in \{ \exists, \forall \}, x \in \mathsf{VAR}$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist
$$\text{sub}(\varphi) := \{ \varphi \} \cup \text{sub}(\psi).$$

Folie 29

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\text{sub}\Big(\forall v_0 \forall v_1 \ \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow\ v_0 = v_1 \Big) \Big) =\ & \\
\Big\{ \forall v_0 \forall v_1 \ \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow\ v_0 = v_1 \Big), & \\
\forall v_1 \ \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow\ v_0 = v_1 \Big), & \\
\Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow v_0 = v_1 \Big), & \\
\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big), & \\
v_0 = v_1, & \\
E(v_0,v_1), & \\
E(v_1,v_0) \Big\} &
\end{aligned}$$

Folie 30

Definition 0.16 (Variablen in Termen)**.**
Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge $\text{var}(t) \subseteq \mathsf{VAR}$ der **Variablen von** t wie folgt: $\text{var}(t)$

- Für $x \in \mathsf{VAR}$ ist $\text{var}(x) := \{ x \}$.
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $\text{var}(c) := \emptyset$.
- Ist $t \in T_\sigma$ von der Form $f(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $f \in \sigma$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist $\text{var}(t) := \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_k)$.

Folie 31

Definition 0.17 (Freie Variablen in Formeln)**.**

frei(φ)
Freie Variablen

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge frei(φ) $\subseteq \mathsf{VAR}$ aller **freien Variablen von** φ wie folgt:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist
$$\operatorname{frei}(\varphi) \ := \ \operatorname{var}(t_1) \cup \operatorname{var}(t_2).$$
- Ist φ von der Form $R(t_1, \dots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$ ein k-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist
$$\operatorname{frei}(\varphi) \ := \ \operatorname{var}(t_1) \cup \cdots \cup \operatorname{var}(t_k).$$
- Ist φ von der Form $\neg\,\psi$ mit $\psi \in$ FO[σ], so ist
$$\operatorname{frei}(\varphi) \ := \ \operatorname{frei}(\psi).$$

Folie 32

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in$ FO[σ], so ist
$$\operatorname{frei}(\varphi) \ := \ \operatorname{frei}(\psi_1) \cup \operatorname{frei}(\psi_2).$$
- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathsf{VAR}$ und $\psi \in$ FO[σ], so ist
$$\operatorname{frei}(\varphi) \ := \ \operatorname{frei}(\psi) \setminus \{x\}.$$

Beispiel:

$$\varphi \ := \ (\ \underbrace{\underbrace{f(v_0,c) = v_3}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_3} \ \wedge \ \underbrace{\exists v_0 \ \underbrace{f(v_0,v_1) = c}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_1}}_{\text{freie Variablen: } v_1}}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_1, v_3} \ )$$

Folie 33

Definition 0.18 (Sätze)**.**

Satz
S_σ

Eine FO[σ]-Formel φ heißt **Satz** (genauer: FO[σ]-Satz), falls frei(φ) $= \emptyset$.
Die Menge aller FO[σ]-Sätze bezeichnen wir mit S_σ.

Folie 34

Definition 0.19 (Belegungen und Interpretationen)**.**

(a) Eine **Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$** ist eine Abbildung $\beta : D \to A$ mit $\text{Def}(\beta) := D \subseteq \mathsf{VAR}$.

Belegung in einer σ-Struktur

(b) Eine Belegung β heißt **passend zu** $t \in T_\sigma$, falls $\text{Def}(\beta) \supseteq \text{var}(t)$.

passende Belegung

(c) Eine Belegung β heißt **passend zu** $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ (bzw. eine Belegung **für** φ), wenn $\text{Def}(\beta) \supseteq \text{frei}(\varphi)$.

(d) Eine **σ-Interpretation** ist ein Paar $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

σ-Interpretation

(e) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ heißt **passend zu** (oder **Interpretation für**) $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ (bzw. $t \in T_\sigma$), falls β passend zu φ (bzw. t) ist.

passende σ-Interpretation

Folie 35

Definition 0.20 (Semantik von σ-Termen)**.** Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

$[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$

- Für alle $x \in \mathsf{VAR}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist
$$[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; f^{\mathcal{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right).$$

Folie 36

Beispiel:
Sei $\sigma := \{ \underset{2}{f}, c \}$, und sei $\mathcal{A} := \big(A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}\big)$ mit $A := \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}} := +^{\mathcal{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$), $c^{\mathcal{A}} := 0$.
Sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$, und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$. Sei $t := f(v_2, f(v_1, c)) \in T_\sigma$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= f^{\mathcal{A}}\left([\![v_2]\!]^{\mathcal{I}}, [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\
&= [\![v_2]\!]^{\mathcal{I}} + [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}} \\
&= \beta(v_2) + f^{\mathcal{A}}\left([\![v_1]\!]^{\mathcal{I}}, [\![c]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\
&= 7 + \big(\beta(v_1) + c^{\mathcal{A}}\big) \\
&= 7 + (1 + 0) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Folie 37

Definition 0.21.

$\beta\frac{a}{x}$

(a) Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, ist $x \in \mathsf{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei $\beta\frac{a}{x}$ die Belegung mit $\text{Def}\big(\beta\frac{a}{x}\big) := \text{Def}(\beta) \cup \{\, x \,\}$, die für alle $y \in \text{Def}\big(\beta\frac{a}{x}\big)$ definiert ist durch

$$\beta\frac{a}{x}(y) \ := \ \begin{cases} a & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{I}\frac{a}{x}$

(b) Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in \mathsf{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei

$$\mathcal{I}\frac{a}{x} \ := \ \big(\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x}\big)\,.$$

Folie 38

Wahrheitswert

$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$

Definition 0.22 (Semantik der Logik erster Stufe)**.** Rekursiv über den Aufbau von FO$[\sigma]$ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder FO$[\sigma]$-Formel φ und jeder zu φ passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen **Wahrheitswert** (kurz: **Wert**) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{\, 0, 1 \,\}$ zuordnet:

Rekursionsanfang:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$[\![t_1{=}t_2]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in \mathsf{T}_\sigma$ gilt:

$$[\![R(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{falls } \big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\big) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Folie 39

Rekursionsschritt:

- Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist

$$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } \ [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \ \text{ und } \ [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } \ [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \ \text{ und } \ [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \to \psi)]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } \ [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \ \text{ und } \ [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Folie 40

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]\sigma$ und ist $x \in \mathsf{VAR}$, so ist

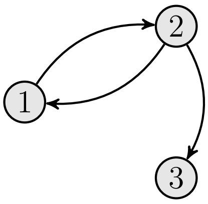
$$[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls es (mind.) ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls für } \textit{jedes } a \in A \text{ gilt: } \ [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Folie 41

Beispiel: Betrachte die Formel $\varphi := \forall x\, \forall y\; (E(x,y) \;\to\; E(y,x))$ über der Signatur $\sigma = \{\, \underset{2}{E} \,\}$ und die σ-Struktur $\mathcal{A} := \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ mit $A = \{\,1,2,3\,\}$, $E^{\mathcal{A}} = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ (im Folgenden auch graphisch dargestellt).

Skizze: $\mathcal{A}$:



Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$, wobei β die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta) = \emptyset$ sei.

Folie 42

Dann gilt: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt:

$$[\![(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$$

$\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt:

$(a,b) \notin E^{\mathcal{A}}$ oder $(b,a) \in E^{\mathcal{A}}$

$\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt:

falls $(a,b) \in E^{\mathcal{A}}$, so auch $(b,a) \in E^{\mathcal{A}}$

$\iff$ $E^{\mathcal{A}}$ ist symmetrisch.

Da in unserem konkreten Graphen $\mathcal{A}$ für $a = 2$, $b = 3$ gilt: $(a,b) \in E^{\mathcal{A}}$, aber $(b,a) \notin E^{\mathcal{A}}$, ist hier $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$.

Folie 43

Definition 0.23 (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)**.**
Sei φ eine FO[σ]-Formel.

Modell
$\mathcal{I} \models \varphi$
erfüllbar
unerfüllbar
allgemeingültig

(a) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ **erfüllt** φ (bzw.: **ist ein Modell von** φ, kurz: $\mathcal{I} \models \varphi$), falls $\mathcal{I}$ passend zu φ ist und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

(b) φ heißt **erfüllbar**, falls es eine σ-Interpretation gibt, die φ erfüllt.
φ heißt **unerfüllbar**, falls φ nicht erfüllbar ist.

(c) φ heißt **allgemeingültig**, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt.

Beobachtung:
Für alle $\varphi \in$ FO[σ] gilt:

- φ allgemeingültig $\iff$ $\neg\varphi$ unerfüllbar.
- φ erfüllbar $\iff$ $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig.

Folie 44

Beispiel 0.24. (Graphen)
Sei $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$ und $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ eine σ-Struktur.

(a) Für alle $a, b \in A$ gilt: Es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg der Länge 3 von a nach b

$$\iff (\mathcal{A}, \beta_\emptyset) \quad \models \quad \forall x\, \forall y\, \exists z_1\, \exists z_2\, \big(E(x,z_1) \land E(z_1,z_2) \land E(z_2,y)\big).$$

Hierbei ist $\beta_\emptyset$ die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta_\emptyset) = \emptyset$.

(b) $\mathcal{A}$ hat Durchmesser $\leqslant 3$, d.h. zwischen je zwei Knoten von $\mathcal{A}$ gibt es einen Weg der Länge $\leqslant 3$

$$\iff (\mathcal{A}, \beta_\emptyset) \quad\models\quad \forall x \, \forall y \, \Big(\, x = y \;\lor\; E(x,y) \;\lor\; \exists z \, \big(E(x,z) \land E(z,y)\big) \\ \lor\; \exists z_1 \, \exists z_2 \, \big(E(x,z_1) \land E(z_1,z_2) \land E(z_2,y)\big) \, \Big).$$

Folie 45

Beispiel 0.25 (Arithmetik).
Sei $\sigma_{\text{Ar}} = \{ \leqslant, +, \cdot, 0, 1 \}$, sei $\mathcal{N} := \big(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\big)$, seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, und sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = a,\ \beta(v_2) = b,\ \beta(v_3) = c$.

(a) $a \,|\, b$ (“a teilt b in $\mathbb{N}$”) $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2)$ mit

$$\varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2) \quad := \quad \exists v_0 \; v_1 \cdot v_0 \; = v_2 \; .$$

(b) $c = a - b \iff (\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{-}(v_1, v_2, v_3)$ mit

$$\varphi_{-}(v_1, v_2, v_3) \quad := \quad v_2 + v_3 = v_1.$$

(c) a ist eine Primzahl $\iff (\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\text{prim}}(v_1)$ mit

$$\varphi_{\text{prim}}(v_1) \quad := \quad \neg\, v_1 = 0 \;\land\; \neg\, v_1 = 1 \;\land \\ \forall v_4 \, \forall v_5 \, \big(v_1 = v_4 \cdot v_5 \;\to\; (v_4 = 1 \;\lor\; v_5 = 1)\big).$$

(d) Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen $\iff$

$$(\mathcal{N}, \beta) \quad\models\quad \forall v_0 \; \exists v_1 \quad \big(v_0 \leqslant v_1 \;\land\; \varphi_{\text{prim}}(v_1)\big),$$

wobei β eine beliebige Belegung in $\mathcal{N}$ ist.

0.2.4 Das Koinzidenzlemma

Folie 46

Das Koinzidenzlemma präzisiert den (anschaulich offensichtlichen) Sachverhalt, dass die Frage, ob eine FO$[\sigma]$-Formel φ von einer σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ erfüllt wird (d.h. ob $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt), nur abhängt von

- der Belegung der in φ frei vorkommenden Variablen (d.h. für Variablen $x \notin \text{frei}(\varphi)$ ist egal, welchen Wert $\beta(x)$ annimmt) und
- der Interpretation $S^{\mathcal{A}}$ der Symbole $S \in \sigma$, die in φ vorkommen (d.h. für Symbole $S' \in \sigma$, die nicht in φ erwähnt werden, ist egal, wie $(S')^{\mathcal{A}}$ aussieht).

Zur präzisen Formulierung des Koinzidenzlemmas sind folgende Notationen nützlich:

Folie 47

Definition 0.26.
Seien σ_1, σ_2 zwei Signaturen. Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation mit $A_1 = A_2$ (d.h. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ haben dasselbe Universum).

(a) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$) **stimmen auf einem Symbol** S **überein**, wenn $S \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ und $S^{\mathcal{A}_1} = S^{\mathcal{A}_2}$.

(b) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. β_1 und β_2) **stimmen auf einer Variablen** x **überein**, wenn $x \in \text{Def}(\beta_1) \cap \text{Def}(\beta_2)$ und $\beta_1(x) = \beta_2(x)$.

Folie 48

Satz 0.27 (Koinzidenzlemma)**.**
Seien σ, σ_1, σ_2 Signaturen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$. Für $i \in \{1, 2\}$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathcal{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i-Interpretation, so dass $A_1 = A_2$.

(a) Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in t vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.

(b) Sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von φ übereinstimmen. Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen: Per Induktion nach dem Aufbau von T_σ $\big($bei (a)$\big)$ bzw. $\text{FO}[\sigma]$ $\big($bei (b)$\big)$.
Details: Übung.

$\square$

Bemerkung 0.28.
Wegen des Koinzidenzlemmas können wir einerseits o.B.d.A. annehmen, dass Belegungen "minimal" sind (d.h. ihr Definitionsbereich enthält gerade die freien Variablen einer Formel oder eines Terms). Andererseits können wir aber auch annehmen, dass ihr Definitionsbereich "maximal" ist (d.h. **alle** Variablen aus VAR enthält). Beides wird gelegentlich nützlich sein.

Folie 49

Notation 0.29.

(a) Für $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ schreiben wir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, um auszudrücken, dass $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \ldots, x_1\} \supseteq \mathrm{frei}(\varphi)$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $a_i := \beta(x_i)$. An Stelle von $\mathcal{I} \models \varphi$ schreiben wir oft auch $\mathcal{A} \models \varphi[\frac{a_1}{x_1}, \ldots, \frac{a_n}{x_n}]$.

Beachte: Diese Schreibweise ist zulässig, da nach dem Koinzidenzlemma für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}, \beta')$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\mathcal{I}' \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi.$$

(b) Um die Notation weiter zu vereinfachen schreiben wir auch kurz

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{an Stelle von} \quad \mathcal{A} \models \varphi\left[\frac{a_1}{x_1}, \ldots, \frac{a_n}{x_n}\right].$$

Folie 50

(c) Für **FO[σ]-Sätze** φ schreiben wir einfach

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{an Stelle von} \quad \text{“}(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \text{ für eine Belegung } \beta\text{”}.$$

Beachte: Gemäß Koinzidenzlemma gilt für alle Belegungen β und β', dass

$$(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \beta') \models \varphi.$$

(d) Ähnliche Schreibweisen verwenden wir für Terme:

- Ist $t \in T_\sigma$ mit $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, so schreibe kurz auch $t(x_1, \ldots, x_n)$.

- Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $a_i := \beta(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, so schreibe an Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ auch

$$t^{\mathcal{A}}\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \ldots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \quad \text{bzw.} \quad t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n].$$

- An Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ schreiben wir manchmal auch $\mathcal{I}(t)$.

Folie 51

Definition 0.30 (Redukte und Expansionen)**.**
Seien σ, τ Signaturen mit $\tau \subseteq \sigma$.

Redukt $\mathcal{A}_{|\tau}$

(a) Das τ-**Redukt** einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die τ-Struktur $\mathcal{A}_{|\tau}$ mit Universum $A_{|\tau} = A$, die mit $\mathcal{A}$ auf allen Symbolen aus τ übereinstimmt.

Expansion

(b) Eine σ-**Expansion** einer τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, für die gilt: $\mathcal{A}_{|\tau} = \mathcal{B}$.

Beispiel 0.31.
Zur Erinnerung: Das Standardmodell der Arithmetik ist

$$\mathcal{N} \ = \ \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\right).$$

Das $\{\leqslant, +, 0\}$-Redukt von $\mathcal{N}$ ist

$$\mathcal{N}_{|\{\leqslant,+,0\}} \ = \ \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}\right).$$

Presburger Arithmetik

Die Struktur $\mathcal{N}_{|\{\leqslant,+,0\}}$ bezeichnet man als das **Standardmodell der Presburger Arithmetik** (benannt nach M. Presburger, 1904–1943).

0.2.5 Das Isomorphielemma

Das folgende Isomorphielemma besagt, dass zwei σ-Strukturen, die isomorph sind, genau dieselben $\text{FO}[\sigma]$-Sätze erfüllen. D.h. isomorphe Strukturen können nicht durch $\text{FO}[\sigma]$-Sätze unterschieden werden.

Folie 52

Satz 0.32 (Isomorphielemma)**.**
Sei φ ein $\text{FO}[\sigma]$-Satz und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi.$$

Beweis:
Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Behauptung 1.
Für alle σ-Terme $t(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\pi(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \quad = \quad t^{\mathcal{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Beweis von Behauptung 1:
Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von T_σ.
Details: Übung.

$\square_{\text{Behauptung } 1}$

Behauptung 2.
Für alle FO$[\sigma]$-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\,a_1, \ldots, a_n\,] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[\,\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\,].$$

Beweis von Behauptung 2:
Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von FO$[\sigma]$.
Details: Übung.

$\square_{\text{Behauptung } 2}$

Beachte: Die Aussage von Satz 0.32 folgt direkt aus Behauptung 2.

$\square_{\text{Satz } 0.32}$

Folie 53

Obiger Beweis zeigt sogar folgendes Resultat:

Korollar 0.33.
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Für jede FO$[\sigma]$*-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\,a_1, \ldots, a_n\,] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[\,\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\,].$$

0.3 Substitutionen

Folie 54

Die in diesem Abschnitt definierten *Substitutionen* liefern einen Begriff des „Ersetzens“ von Variablen durch Terme, für den Folgendes gilt:

> Sei φ eine FO[σ]-Formel. Ersetzt man in φ eine freie Variable x durch einen Term $t(y_1, \ldots, y_n)$, so sagt die dadurch entstehende Formel φ' über den Term $t(y_1, \ldots, y_n)$ dasselbe aus wie die Formel φ über die Variable x.

Etwas Vorsicht ist allerdings beim „Ersetzen“ geboten:

Folie 55

Beispiel 0.34.
Betrachte die FO[σ_{Ar}]-Formel

$$\varphi(v_0) \ := \ \exists v_1 \ v_1 + v_1 = v_0,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_0 eine gerade Zahl ist.

(a) Ersetzt man die Variable v_0 durch die Variable v_5, so erhält man die Formel

$$\psi(v_5) \ = \ \exists v_1 \ v_1 + v_1 = v_5,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_5 gerade ist.

(b) Ersetzt man die Variable v_0 durch den Term $(v_0 \cdot v_0) + 1$, so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \ v_1 + v_1 = (v_0 \cdot v_0) + 1,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass $(v_0 \cdot v_0) + 1$ gerade ist.

Folie 56

(c) Ersetzt man aber die (gebundene) Variable v_1 durch die (freie) Variable v_0, so erhält man die Formel

$$\exists v_0 \ v_0 + v_0 = v_0.$$

Diese Formel hat eine völlig andere Bedeutung als die Formel $\varphi(v_0)$.

Daher sollte man nur freie Variablen ersetzen!

(d) Ersetzt man die (freie) Variable v_0 durch v_1, so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_1,$$

die ähnlich wie in (c) eine ganz andere Bedeutung hat als die Formel $\varphi(v_0)$.

Beim Ersetzen von freien Variablen muss man daher aufpassen, dass es keine Konflikte mit gebundenen Variablen gibt! Die gebundenen Variablen werden dazu — falls nötig — umbenannt.

Der Begriff des „Ersetzens" von Variablen wird daher folgendermaßen formalisiert:

Folie 57

Definition 0.35.

(a) Eine **σ-Substitution** ist eine Abbildung

σ-Substitution

$$\mathcal{S} \;:\; D \;\to\; T_\sigma,$$

wobei $D = \mathrm{Def}(\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{VAR}$ *endlich* ist.

(b) Für eine **σ-Substitution** $\mathcal{S}$ sei $\mathrm{var}(\mathcal{S})$ die Menge aller Variablen, die in einem Term im *Bild* von $\mathcal{S}$ vorkommen. D.h.:

$\mathrm{var}(\mathcal{S})$

$$\mathrm{var}(\mathcal{S}) \;:=\; \bigcup_{x \in \mathrm{Def}(\mathcal{S})} \mathrm{var}(\mathcal{S}(x)).$$

Folie 58

Definition 0.36 (Anwenden von Substitutionen auf Interpretationen)**.** Für jede σ-Substitution $\mathcal{S}$ und jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathrm{var}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Def}(\beta)$ sei

$$\mathcal{I}\mathcal{S} \;:=\; (\mathcal{A}, \beta\mathcal{S}),$$

wobei $\beta\mathcal{S} : \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(\mathcal{S}) \to A$ die folgendermaßen definierte Belegung ist:

- Für alle $x \in \mathrm{Def}(\mathcal{S})$ ist $\beta\mathcal{S}(x) := [\![\mathcal{S}(x)]\!]^{\mathcal{I}}$.
- Für alle $x \in \mathrm{Def}(\beta) \setminus \mathrm{Def}(\mathcal{S})$ ist $\beta\mathcal{S}(x) := \beta(x)$.

Folie 59

Definition 0.37 (Substitution in Termen).
Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution. Induktiv über den Aufbau von T_σ definieren wir für jedes $t \in T_\sigma$ den Term $t\mathcal{S}$, der aus t durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

$t\mathcal{S}$

- Für alle $x \in \mathsf{VAR}$ ist

$$x\mathcal{S} \ := \ \begin{cases} \mathcal{S}(x) & \text{falls } x \in \text{Def}(\mathcal{S}) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist

$$c\mathcal{S} \ := \ c.$$

- Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$, für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ ist

$$f(t_1, \ldots, t_k)\mathcal{S} \ := \ f(t_1\mathcal{S}, \ldots, t_k\mathcal{S}).$$

Folie 60

Lemma 0.38 (Substitutionslemma für Terme).
Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{var}(\mathcal{S}) \subseteq \text{Def}(\beta)$.
Für alle σ-Terme t mit $\text{var}(t) \subseteq \text{Def}(\beta) \cup \text{Def}(\mathcal{S})$ *gilt:*

$$[\![t\mathcal{S}]\!]^{\mathcal{I}} \ = \ [\![t]\!]^{\mathcal{I}\mathcal{S}}.$$

Beweis:
Per Induktion über den Aufbau von Termen. Details: Übung.

☐

Folie 61

Definition 0.39 (Substitution in Formeln).
Induktiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir für alle σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ und alle FO[σ]-Formeln φ die Formel $\varphi\mathcal{S}$, die aus φ durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

$\varphi\mathcal{S}$

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \ := \ t_1\mathcal{S} = t_2\mathcal{S}.$$

- Ist φ von der Form $R(t_1,\dots,t_k)$ mit $R\in\sigma$, $k=\mathrm{ar}(R)$, $t_1,\dots,t_k\in T_\sigma$, so
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; R(t_1\mathcal{S},\dots,t_k\mathcal{S}).$$
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ mit $\psi\in\mathrm{FO}[\sigma]$, so
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; \neg\,\psi\mathcal{S}.$$
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1,\psi_2\in\mathrm{FO}[\sigma]$, $*\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$, so
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; (\,\psi_1\mathcal{S} \;*\; \psi_2\mathcal{S}\,).$$

Folie 62

- Ist φ von der Form $Qx\;\psi$ mit $Q\in\{\exists,\forall\}$, $x\in\mathsf{VAR}$, $\psi\in\mathrm{FO}[\sigma]$, so ist
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; Qy\;\psi\mathcal{S}',$$
wobei y und $\mathcal{S}'$ wie folgt gewählt sind:
  - Sei $U:=\{u\in\mathrm{Def}(\mathcal{S}) : u\in\mathrm{frei}(\varphi)\text{ und } u\neq\mathcal{S}(u)\}$ (insbes. ist $x\notin U$, da $x\notin\mathrm{frei}(\varphi)$).
  - Falls $x\notin\mathrm{var}(\mathcal{S}_{|U})$, d.h. x kommt *nicht* in $\{\mathcal{S}(u) : u\in U\}$ vor, so setze $y:=x$.
  - Falls $x\in\mathrm{var}(\mathcal{S}_{|U})$, so sei y die erste Variable in der Aufzählung $v_0,v_1,v_2,v_3,\dots$ von VAR, die weder in φ noch in $\mathrm{var}(\mathcal{S}_{|U})$ vorkommt.
  - Setze $\mathcal{S}':=\mathcal{S}_{|U}\cup\{(x,y)\}$, d.h.: $\mathrm{Def}(\mathcal{S}')=U\cup\{x\}$, $\mathcal{S}'(x)=y$ und $\mathcal{S}'(u)=\mathcal{S}(u)$ für alle $u\in U$.

Folie 63

Notation 0.40.

(a) Wir schreiben σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{S})=\{x_1,\dots,x_n\}$ und $t_i=\mathcal{S}(x_i)$ für $i\in\{1,\dots,n\}$ auch in der Form
$$\tfrac{t_1,\dots,t_n}{x_1,\dots,x_n}.$$
Insbesondere schreiben wir für $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ auch
$$\varphi\tfrac{t_1,\dots,t_n}{x_1,\dots,x_n}\quad\text{an Stelle von}\quad\varphi\mathcal{S}.$$

(b) Für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\operatorname{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und für Terme $t_1, \ldots, t_n$ schreiben wir auch

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi\frac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n}.$$

Entsprechende Schreibweisen verwenden wir auch für Terme.

Folie 64

Beispiel 0.41.
Sei $\sigma := \{\underset{2}{f}, \underset{2}{R}\}$.

(a) Für $\varphi := R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\varphi\frac{v_2,v_0,v_1}{v_1,v_2,v_3} \;=\; R\big(v_0, f(v_2, v_0)\big).$$

(b) Für $\varphi := \exists v_0\ R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi\frac{v_4,f(v_1,v_1)}{v_0,v_2} &= \exists v_0\ \Big[\, R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)\frac{f(v_1,v_1),v_0}{v_2,\quad v_0}\,\Big] \\ &= \exists v_0\ R\Big(v_0, f\big(v_1, f(v_1, v_1)\big)\Big).\end{aligned}$$

(c) Für $\varphi := \exists v_0\ R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi\frac{v_0,v_4}{v_1,v_0} &= \exists v_3\ \Big[\, R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)\frac{v_0,v_3}{v_1,v_0}\,\Big] \\ &= \exists v_3\ R\big(v_3, f(v_0, v_2)\big).\end{aligned}$$

Das im folgenden Satz 0.42 formulierte Substitutionslemma für Formeln sowie das darauf folgende Lemma 0.43 zeigen, dass der obige Substitutionsbegriff "sinnvoll" gewählt ist.

Folie 65

Satz 0.42 (Substitutionslemma für Formeln)**.**
Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\operatorname{var}(\mathcal{S}) \subseteq \operatorname{Def}(\beta)$.
Für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formeln φ mit* $\operatorname{frei}(\varphi) \subseteq \operatorname{Def}(\beta) \cup \operatorname{Def}(\mathcal{S})$ *gilt:*

$$\mathcal{I} \models \varphi\mathcal{S} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I}\mathcal{S} \models \varphi.$$

Beweis:
Per Induktion über den Aufbau von Formeln, unter Verwendung von Lemma 0.38.
Details: Übung.

$\square$

Lemma 0.43.
Für jeden σ-Term t, jede $\text{FO}[\sigma]$-Formel φ und jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ gilt:
$t\frac{x}{x} = t$ *und* $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von Formeln.
Details: Übung.

$\square$

0.4 Literaturhinweise

Abschnitt 0.1 orientiert sich an Kapitel 1 aus [Sch07]; Zur weiteren Lektüre werden jeweils das erste Kapitel und die Einleitung von [EFT98] und [Lib04] empfohlen. Der Artikel [HHI$^+$07] bietet einen Überblick über verschiedene Anwendungsgebiete der Logik in der Informatik. Einen Einblick in die Geschichte der logischen Grundlagen der Mathematik gibt der Comic [DPPD09].
Mehr Details zu Syntax und Semantik der Logik erster Stufe, zum Koinzidenzlemma, dem Isomorphielemma und Substitutionen finden sich in Kapitel 2 und 3 in [EFT98].

0.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 0.1

Geben Sie $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(a) Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadratzahlen.

(b) Jede Primzahl ist Summe zweier Quadratzahlen.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, so dass $p = 3m + 2$ für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$.

(d) $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. es gibt keine Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

(e) Jede zusammengesetzte Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen Teiler $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant \sqrt{n}$.

Aufgabe 0.2

Die Signatur σ bestehe aus einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem 1-stelligen Relationssymbol P. Betrachten Sie die FO[σ]-Formeln

(a) $\varphi_1 := \ \exists v_0 \, \forall v_1 \ f(v_0, v_1) = v_1$

(b) $\varphi_2 := \ \exists v_0 \big(P(v_0) \ \land \ \forall v_1 \ P(f(v_0, v_1)) \big)$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$ σ-Interpretationen $\mathcal{I}_i$ und $\mathcal{J}_i$ an mit $\mathcal{I}_i \models \varphi_i$ und $\mathcal{J}_i \not\models \varphi_i$.

Aufgabe 0.3

Sei σ eine Signatur, die aus endlich vielen Symbolen besteht und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur, deren Universum A endlich ist.

(a) Geben Sie einen FO[σ]-Satz $\varphi_{\mathcal{A}}$ an, der die Struktur $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt. Das heißt, es soll für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten: $\quad \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$.

(b) Beweisen Sie, dass ihre Formel $\varphi_{\mathcal{A}}$ die in a geforderte Eigenschaft tatsächlich besitzt. Das heißt, zeigen Sie, dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\quad \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$.

Aufgabe 0.4

Sei $\sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol $\leqslant$ sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b besteht.
Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n$ der Länge $n \geqslant 1$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ ordnen wir die folgende σ-Struktur $\mathcal{A}_w = \big(A_w, \leqslant^{\mathcal{A}_w}, P_a^{\mathcal{A}_w}, P_b^{\mathcal{A}_w}\big)$ zu:

- $A_w := \{1, \ldots, n\}$,
- $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \ldots, n\}$,
- $P_a^{\mathcal{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = a \,\}$,
- $P_b^{\mathcal{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = b \,\}$.

Ein FO[σ]-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

(a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[σ]-Satz φ_0?

$$\varphi_0 \ := \ \exists x \, \exists y \, \Big(\big(x \leqslant y \ \land \neg x{=}y \,\big) \land \forall z \, \big((z \leqslant x \land P_a(z)) \lor (y \leqslant z \land P_b(z)) \,\big) \Big)$$

(b) Geben Sie einen FO$[\sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $a(a|b)^*bb(a|b)^*$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Können Sie auch einen FO$[\sigma]$-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist?
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.

Aufgabe 0.5

Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{E\}$ und $\sigma_{\text{Ar}} = \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$.

(a) Geben Sie FO$[\sigma_{\text{Graph}}]$-Formeln an, die in einem endlichen gerichteten Graphen G folgende intuitive Bedeutung haben:

  (i) G enthält keine isolierten Knoten. (*Zur Erinnerung:* Ein isolierter Knoten ist ein Knoten, der keinen Nachbarn besitzt)

  (ii) G enthält einen Kreis der Länge drei.

(b) Geben Sie FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

  (i) Es gibt unendlich viele pythagoreische Tripel, also Tupel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, die den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen, d.h. die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

  (ii) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

Aufgabe 0.6

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma (Satz 0.27).

Aufgabe 0.7

Beweisen Sie das Isomorphielemma (Satz 0.32).

Aufgabe 0.8

Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und R, E zweistellige Relationssymbole. Berechnen Sie

(a) $\big(R(v_1, v_2) \land f(v_0, v_2){=}v_1\big)\ \frac{f(v_0,v_2),\ f(v_1,v_5)}{v_0 \quad , \quad v_2}$

(b) $\exists v_1 \big(R(v_1, v_2) \land f(v_0, v_2){=}v_1\big)\ \frac{v_2,\ v_3}{v_0,\ v_2}$

(c) $\exists v_1 \big(R(v_1, v_2) \land \forall v_2\, f(v_0, v_2){=}v_1\big)\ \frac{f(v_0,v_2),\ v_3}{v_1 \quad ,\ v_2}$

(d) $\exists v_1 \big(R(v_0, v_2) \land \forall v_0\, R(v_1, f(v_4, v_0))\big)\ \frac{f(v_1,v_2),\ v_0}{v_0 \quad ,\ v_3}$

(e) $\exists v_1 \big(E(v_0,v_1) \land \exists v_0 \, \big(E(v_1,v_0) \land \forall v_1 E(v_0,v_1) \big) \big) \; \frac{v_1}{v_0}$

Aufgabe 0.9
Es sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol. Betrachten Sie die Substitution $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{S}(v_1) := f(v_0,v_0)$, $\mathcal{S}(v_2) := f(v_0,v_1)$ und $\mathcal{S}(v_3) := f(v_1,v_0)$.
Berechnen Sie $\varphi\mathcal{S}$ für die folgenden Formeln φ:

(a) $v_3 = f(v_1,v_2)$

(b) $\forall v_2 \; v_3{=}f(v_1,v_2)$

(c) $\exists v_1 \; v_3{=}f(v_1,v_2)$

(d) $\exists v_1 \, \forall v_2 \; v_3{=}f(v_1,v_2)$.

Aufgabe 0.10
Beweisen Sie das Substitutionslemma (Satz 0.42).

Aufgabe 0.11
Beweisen Sie das Lemma 0.43, d.h. zeigen Sie:
Für jeden σ-Term t, jede $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ und jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ gilt: $t\frac{x}{x} = t$ *und* $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

Kapitel 1

Der Vollständigkeitssatz

Folie 66

Ziel dieses Kapitels ist, ein "formales Beweissystem", den so genannten **Sequenzenkalkül**, kennenzulernen, mit dem man alle allgemeingültigen FO-Formeln herleiten kann. Insbesondere folgt daraus dann, dass das Problem

ALLGEMEINGÜLTIGKEITSPROBLEM DER LOGIK ERSTER STUFE
Eingabe: Eine FO[σ]-Formel φ
Frage: Gilt $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle zu φ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$?

semi-entscheidbar ist.

1.1 Beweiskalküle

Folie 67

Definition 1.1 (Ableitungsregel; Kalkül)**.**
Sei M eine beliebige Menge.

(a) Eine **Ableitungsregel über** M hat die Form

Ableitungsregel über M

$$\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

Voraussetzungen

(b) Wir bezeichnen $a_1, \dots, a_n$ als die **Voraussetzungen** der Regel $\dfrac{\begin{array}{c}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{array}}{b}$

Konsequenz

und b als die **Konsequenz**.

Axiome

Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als **Axiome**.

Kalkül

(c) Ein **Kalkül** über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M.

Folie 68

Definition 1.2 (Ableitbare Elemente)**.**
Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M.

$\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$

aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbare Elemente

(a) Sei $V \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge von M. Die Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq M$ aller **aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente** ist rekursiv wie folgt definiert:

(I) Für alle $b \in V$ ist $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(II) Für alle Axiome $\dfrac{}{b}$ in $\mathfrak{K}$ ist $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(III) Für alle Ableitungsregeln $\dfrac{\begin{array}{c}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{array}}{b}$ in $\mathfrak{K}$ gilt: Wenn $a_1, \dots, a_n \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, so auch $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

$\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ ist also die bezüglich „$\subseteq$" kleinste Teilmenge von M, die die Abschlusseigenschaften (I), (II) und (III) besitzt.

Voraussetzungen

Die Menge V wird auch **Menge der Voraussetzungen** genannt.

In $\mathfrak{K}$ ableitbare Elemente

(b) Die Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}} := \text{abl}_{\mathfrak{K}}(\emptyset)$ ist die Menge aller **in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente**

Kalküle sind also einfach eine andere Schreibweise für rekursive Definitionen.

Folie 69

Definition 1.3 (Ableitungen)**.**
Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$

(a) Eine **Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$** ist eine endliche Folge $(a_1, \dots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt:

- $a_i \in V$ oder

- $\overline{a_i}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder
- es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{array}}{a_i}$, so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

(b) Eine **Ableitung von a in $\mathfrak{K}$** ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$.

Ableitung von a in $\mathfrak{K}$

Beobachtung 1.4. Offensichtlich gilt:
a ist genau dann aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbar (gemäß Definition 1.2), wenn es eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ gibt (gemäß Definition 1.3).

1.2 Ein Sequenzenkalkül

In diesem Kapitel sei σ eine beliebige fest gewählte Signatur (im Sinne von Definition 0.1).

Folie 70

Notation 1.5.

- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \ldots$ bezeichnen immer σ-Terme.
- $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ bezeichnen immer FO[σ]-Formeln.
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \ldots$ bezeichnen Mengen von FO[σ]-Formeln.
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen **endliche** Mengen von FO[σ]-Formeln.
- Für $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist $\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$.

  Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}\big(\Phi \cup \{\varphi\}\big)$.
- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine **endliche** Teilmenge von M ist.

$L \subseteq_e M$

Folie 71

Definition 1.6 (Sequenzen).

Sequenz

(a) Eine **Sequenz** ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi,$$

wobei $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Antezedens
Sukzedens

Wir bezeichnen Γ als das **Antezedens** und ψ als das **Sukzedens** der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

M_S

(b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, das heißt:

$$M_S \ := \ \big\{ \Gamma \vdash \psi \ : \ \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}[\sigma] \big\}.$$

Notation 1.7.

- Statt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
- Statt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$.

Die folgende Definition legt (auf die naheliegende Weise) fest, wann eine Formel ψ aus einer ganzen Menge Φ von Formeln folgt:

Folie 72

Definition 1.8.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

ψ folgt aus Φ
Φ impliziert ψ
$\Phi \models \psi$

ψ **folgt aus** Φ (bzw. Φ **impliziert** ψ), kurz $\Phi \models \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu ψ und zu allen $\varphi \in \Phi$ passen, gilt: falls für alle $\varphi \in \Phi$ gilt $\mathcal{I} \models \varphi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation 1.9.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I}$ eine σ-Interpretation.

$\mathcal{I}$ passt zu Φ

- Wir sagen $\mathcal{I}$ **passt zu** Φ, falls $\mathcal{I}$ zu jedem $\varphi \in \Phi$ passt.

$\mathcal{I} \models \Phi$
$\mathcal{I}$ **erfüllt** Φ

- $\mathcal{I} \models \Phi$ (in Worten: $\mathcal{I}$ **erfüllt** Φ) $\ :\iff \$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Folie 73

Definition 1.10 (Korrekte Sequenzen und Sequenzenregeln).

korrekt

(a) Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt **korrekt**, wenn gilt: $\Gamma \models \psi$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1\\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt **korrekt**, wenn Folgendes gilt: Sind die Sequenzen $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ korrekt, so ist auch die Sequenz $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ korrekt.

Folie 74

Die folgende Definition führt einen Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen ein, den sogenannten **Sequenzenkalkül** $\mathfrak{K}_S$. Im Verlauf von Kapitel 1 werden wir sehen, dass Folgendes gilt:

Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$

(a) Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathfrak{K}_S$ besteht, sind korrekt. Daraus folgt dann, dass auch alle in $\mathfrak{K}_S$ ableitbaren Sequenzen korrekt sind.

(b) Ist $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \models \psi$, dann gibt es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Die Eigenschaften (a) und (b) werden **Korrektheit** bzw. **Vollständigkeit** des Kalküls $\mathfrak{K}_S$ genannt. Der Einfachheit halber werden wir nur Formeln betrachten, in denen keins der Symbole $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vorkommt.

Korrektheit
Vollständigkeit

Folie 75

Definition 1.11 (Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$).
Der **Sequenzekalkül** $\mathfrak{K}_S$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der aus den folgenden Ableitungsregeln besteht — für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$, $\varphi, \psi, \chi \in \text{FO}[\sigma]$, $t, u \in T_\sigma$, $x, y \in \mathsf{VAR}$:

Grundregeln

- Voraussetzungsregel (V): (V)

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \ \vdash \varphi}$$

- Erweiterungsregel (E): (E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Folie 76

Aussagenlogische Regeln

(FU)

- Fallunterscheidungsregel (FU):

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

(W)

- Widerspruchsregel (W):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \text{(für alle } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]\text{)}$$

($\wedge$A$_1$)
($\wedge$A$_2$)

- $\wedge$-Einführung im Antezedens ($\wedge$A$_1$), ($\wedge$A$_2$):

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\psi \wedge \varphi) \vdash \chi}$$

Folie 77

($\wedge$S)

- $\wedge$-Einführung im Sukzedens ($\wedge$S):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

($\vee$A)

- $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A):

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \varphi \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

($\vee$S$_1$)
($\vee$S$_2$)

- $\vee$-Einführung im Sukzedens ($\vee$S$_1$), ($\vee$S$_2$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$$

Folie 78

Quantorenregeln

- $\forall$-Einführung im Antezedens ($\forall$A): ($\forall$A)

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-Einführung im Sukzedens ($\forall$S): ($\forall$S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$$

- $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A): ($\exists$A)

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

- $\exists$-Einführung im Sukzedens ($\exists$S): ($\exists$S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi}$$

Folie 79

Gleichheitsregeln

- Reflexivität der Gleichheit (G): (G)

$$\frac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

- Substitutionsregel (S): (S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t{=}u \ \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

Im Folgenden geben wir zwei Beispiele für Ableitungen im Sequenzenkalkül an.

Folie 80

Beispiel 1.12.

(a) Für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ ist $\emptyset \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)	φ	$\vdash$	φ	(V)
(2)	φ	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S$_1$) auf (1) angewendet
(3)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(4)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S$_2$) auf (3) angewendet
(5)	$\emptyset$	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(FU) auf (2), (4) angewendet.

(b) $R\big(f(x)\big), \forall x\; x{=}f(x) \;\vdash R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ ist ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)	$R\big(f(x)\big)$	$\vdash$	$R\big(f(x)\big)$	(V)
(2)	$R\big(f(x)\big), x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	(S) auf (1) mit $t{:=}x$, $u{:=}f(x)$
(3)	$R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	($\forall$A) auf (2) mit $t{:=}x$.

Der folgende Satz bestätigt Punkt (a) der auf Seite 43 beschriebenen Agenda:

Folie 81

Satz 1.13 (Korrekheit des Sequenzenkalküls)**.**
Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathfrak{K}_S$ besteht, sind korrekt; und jede in $\mathfrak{K}_S$ ableitbare Sequenz ist korrekt.

Beweis:
Wir zeigen, dass jede Ableitungsregel von $\mathfrak{K}_S$ korrekt ist, das heißt es gilt: Wenn die Voraussetzungen der Regel korrekt sind, dann ist auch die Konsequenz korrekt. Die Korrektheit aller in $\mathfrak{K}_S$ ableitbaren Sequenzen folgt dann leicht per Induktion nach der Länge von Ableitungen.

(V): $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \;\vdash \varphi}$

Offensichtlich gilt: $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \varphi$. Daher ist die Sequenz $\Gamma, \varphi \;\vdash \varphi$ korrekt.

(G): $\dfrac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$

Offensichtlich ist die Formel $t{=}t$ allgemeingültig. Daher gilt für alle Γ, dass $\Gamma \models t{=}t$. Somit ist die Sequenz $\Gamma \vdash t{=}t$ korrekt.

(E): $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi}$ falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$

Annahme: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt, das heißt $\Gamma \models \varphi$. Sei $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Zu zeigen: $\Gamma' \models \varphi$.

Beweis:
Sei $\mathcal{I}$ eine zu Γ' und φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma'$. Wegen $\Gamma \subseteq \Gamma'$ gilt dann auch: $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $\Gamma \models \varphi$ folgt, dass $\mathcal{I} \models \varphi$. Somit gilt: $\Gamma' \models \varphi$, das heißt $\Gamma' \vdash \varphi$ ist korrekt.

(FU): $\dfrac{\begin{array}{r}\Gamma, \psi \vdash \varphi\\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$

Annahme: $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ ist korrekt und $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$ ist korrekt.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

Beweis:
Laut Annahme gilt $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$.
Sei $\mathcal{I}$ eine zu $\Gamma \cup \{\psi\} \cup \{\varphi\}$ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

Fall 1: $\mathcal{I} \models \psi$:
Dann gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$. Wegen $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Fall 2: $\mathcal{I} \models \neg\psi$:
Dann gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$. Wegen $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Somit gilt: $\Gamma \models \varphi$, das heißt die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

(W): $\dfrac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi\\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$ (für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$)

Annahme: $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$ sind korrekt.

Zu zeigen: Für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ ist $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt.

Beweis:
Wir zeigen, dass es keine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ geben kann, die Γ erfüllt. Daraus folgt dann unmittelbar, dass $\Gamma \models \varphi$, womit die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt ist.

Angenommen, $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ ist eine zu Γ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Der Definitionsbereich von β so erweitert werden, dass $\mathcal{I}$ auch zur Formel ψ passt. Laut Annahme gilt $\Gamma \models \psi$ und $\Gamma \models \neg\psi$. Wegen $\mathcal{I} \models \Gamma$ muss daher sowohl $\mathcal{I} \models \psi$ als auch $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gelten. Dies ist aber nicht möglich! ↯

$(\wedge\text{A}_1)$: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$

Annahme: $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ ist korrekt.

Zu zeigen: $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi$ ist korrekt.

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass jede zu $\Gamma \cup \{(\varphi \wedge \psi), \chi\}$ passende Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{(\varphi \wedge \psi)\}$ auch $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und damit nach Annahme auch χ erfüllt.

$(\wedge A_2)$, $(\wedge\text{S})$, $(\vee\text{A})$, $(\vee\text{S}_1)$, $(\vee\text{S}_2)$, $(\forall\text{A})$, $(\exists\text{S})$, (S): ähnlich leicht!

$(\forall\text{S})$: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\, \varphi)$

Annahme: $\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$ ist korrekt, das heißt $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ ist korrekt.

Beweis: Sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\, \varphi)$.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine zu Γ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ gilt laut Koinzidenzlemma für alle $a \in A$: $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$.
Gemäß Annahme gilt: $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$. Somit gilt für alle $a \in A$, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$.

Das heißt es gilt: $\mathcal{I} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x}$.

Wegen $y \notin \text{frei}(\forall x\, \varphi) = \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$ gilt gemäß Substitutionslemma, dass $\mathcal{I} \models \forall x\, \varphi$.
Somit gilt: $\Gamma \models \forall x\, \varphi$, das heißt die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ ist korrekt.

$$(\exists\mathrm{A}):\ \frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\, \varphi \vdash \psi}\quad \text{, falls } y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

Beweis: Analog; Details: Übung.

Dies schließt den Beweis von Satz 1.13 ab.

$\square_{\text{Satz 1.13}}$

Wir betrachten den Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ als „formales Beweissystem", mit dem man mechanisch den Nachweis erbringen kann, dass für eine Formelmenge Φ und eine Formel φ gilt: $\Phi \models \varphi$. Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Folie 82

Definition 1.14 (Beweisbarkeit)**.**
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Die Formel φ ist **beweisbar** aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Ein **Beweis** von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$.

beweisbar
$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$
Beweis

Aus Satz 1.13 folgt direkt:

Korollar 1.15.
Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt: Falls* $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$*, so* $\Phi \models \varphi$*.*
Das heißt: Falls φ *aus* Φ *beweisbar ist, so folgt* φ *semantisch aus* Φ*.*

Unser Ziel im Rest von Kapitel 1 ist, zu zeigen, dass auch die Umkehrung von Korollar 1.15 gilt, das heißt: Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi.$$

Dies ist die Aussage des **Vollständigkeitssatz**es. Man beachte, dass die Richtung „$\Longleftarrow$" gerade Punkt (b) der auf Seite 43 beschriebenen Agenda darstellt.

Vollständigkeitssatz

1.3 Ableitbare Regeln im Sequenzenkalkül

Folie 83

Definition 1.16.
Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

ableitbar (in $\mathfrak{K}_S$)

heißt **ableitbar (in $\mathfrak{K}_S$)**, wenn $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ aus der Menge $V := \big\{\Gamma_i \vdash \varphi_i \ : \ i \in \{1, \ldots, k\}\big\}$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Lemma 1.17.
Sei $\mathfrak{K}_S{}'$ eine Erweiterung des Sequenzenkalküls $\mathfrak{K}_S$ um eine oder mehrere ableitbare Sequenzenregeln. Dann ist eine Sequenz S genau dann in $\mathfrak{K}_S{}'$ ableitbar, wenn sie in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Beweis: Übung (vgl. Aufgabe 1.1).

□

Im Folgenden wird eine Liste von ableitbaren Sequenzenregeln zusammengestellt, die für den Beweis des Vollständigkeitssatzes sehr nützlich sein werden.

Folie 84

Lemma 1.18 (Ableitbare aussagenlogische Sequenzenregeln)**.**
Folgende Sequenzenregeln sind für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ableitbar:

Kettenschlussregel (KS)

- *Kettenschlussregel (KS):*

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

Disjunktiver Syllogismus (DS)

- *Disjunktiver Syllogismus (DS):*

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \neg\varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- *Modus Ponens*[1] *(MP):*

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

Folie 85

- Kontrapositionsregeln (KP):

Kontrapositionsregeln (KP)

  - $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$
  - $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi}$
  - $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}$
  - $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$

Beweis:

(KS):

(1)	Γ	$\vdash$	φ	(Voraussetzung)
(2)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	(E) auf (1)
(4)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(5)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ	$\vdash$	ψ	(FU) auf (2), (5)

(DS):

(1)	Γ	$\vdash$	$(\varphi \vee \psi)$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$\neg\varphi$	(Voraussetzung)
(3)	Γ, φ	$\vdash$	$\neg\varphi$	(E) auf (2)
(4)	Γ, φ	$\vdash$	φ	(V)
(5)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ, ψ	$\vdash$	ψ	(V)
(7)	$\Gamma, (\varphi \vee \psi)$	$\vdash$	ψ	($\vee$A) auf (5), (6)
(8)	Γ	$\vdash$	ψ	(KS) auf (1), (7)

---

[1] Wir betrachten hier $(\varphi \to \psi)$ als "abkürzende Schreibweise" für die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$.

(MP):

(1)	Γ	$\vdash (\neg\varphi \vee \psi)$	(Voraussetzung) **Beachte:** $(\varphi \to \psi)$ ist eine Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$
(2)	Γ	$\vdash \varphi$	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash \varphi$	(E) auf (2)
(4)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi$	(V)
(5)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash \psi$	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ, ψ	$\vdash \psi$	(V)
(7)	$\Gamma, (\neg\varphi \vee \psi)$	$\vdash \psi$	($\vee$A) auf (5), (6)
(8)	Γ	$\vdash \psi$	(KS) auf (1), (7)

(KP):

(1)	Γ, φ	$\vdash \psi$	(Voraussetzung)
(2)	$\Gamma,\ \neg\psi,\ \varphi$	$\vdash \psi$	(E) auf (1)
(3)	$\Gamma, \neg\psi$	$\vdash \neg\psi$	(V)
(4)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash \neg\psi$	(E) auf (3)
(5)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash \neg\varphi$	(W) auf (2), (4)
(6)	$\Gamma, \neg\psi, \neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi$	(V)
(7)	$\Gamma, \neg\psi$	$\vdash \neg\varphi$	(FU) auf (5),(6)

Die anderen Kontrapositionsregeln können analog abgeleitet werden.

□

Folie 86

Lemma 1.19 (Ableitbare Quantorenregeln).
Folgende Sequenzenregeln sind für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, *alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle* $x \in \mathsf{VAR}$ *ableitbar:*

(QA) *Quantorenaustauschregeln (QA):*

$$1)\quad \frac{\Gamma \vdash \neg\forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\ \neg\varphi}$$

$$2)\quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\forall x\ \varphi}$$

3) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\exists x\ \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\ \neg\varphi}$$

4) $$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\exists x\ \varphi}$$

Beweis:

Zu 1):

$$\begin{array}{llll}
(1) & \Gamma & \vdash\ \neg\forall x\ \varphi & \text{(Voraussetzung)} \\
(2) & \Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} & \vdash\ \neg\varphi\frac{y}{x} & \text{(V) ; sei } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi) \\
(3) & \Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} & \vdash\ \exists x\ \neg\varphi & (\exists\text{S}) \text{ auf (2) mit } t{:=}y \\
(4) & \Gamma, \neg\exists x\ \neg\varphi & \vdash\ \varphi\frac{y}{x} & \text{(KP) auf (3)} \\
(5) & \Gamma, \neg\exists x\ \neg\varphi & \vdash\ \forall x\ \varphi & (\forall\text{S}) \text{ auf (4)} \\
(6) & \Gamma, \neg\forall x\ \varphi & \vdash\ \exists x\ \neg\varphi & \text{(KP) auf (5)} \\
(7) & \Gamma & \vdash\ \exists x\ \neg\varphi & \text{(KS) auf (1),(6)}
\end{array}$$

Zu 2):

$$\begin{array}{llll}
(1) & \Gamma & \vdash\ \exists x\ \neg\varphi & \text{(Voraussetzung)} \\
(2) & \Gamma, \varphi\frac{y}{x} & \vdash\ \varphi\frac{y}{x} & \text{(V) ; sei } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi) \\
(3) & \Gamma, \forall x\varphi & \vdash\ \varphi\frac{y}{x} & (\forall\text{A}) \\
(4) & \Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} & \vdash\ \neg\forall x\ \varphi & \text{(KP) auf (3)} \\
(5) & \Gamma, \exists x\ \neg\varphi & \vdash\ \neg\forall x\ \varphi & (\exists\text{A}) \text{ auf (4)} \\
(6) & \Gamma & \vdash\ \neg\forall x\ \varphi & \text{(KS) auf (1),(5)}
\end{array}$$

Zu 3) und 4): analog.

□

Folie 87

Lemma 1.20 (Ableitbare Gleichheitsregeln).
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar — für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$*, für alle* $t, u, t_1, u_1, t_2, u_2, \dots \in T_\sigma$*:*

- *Symmetrie der Gleichheit (SG):* (SG)

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}$$

(TG)

- *Transitivität der Gleichheit (TG):*

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = t_2\\ \Gamma \vdash t_2 = t_3\end{array}}{\Gamma \vdash t_1 = t_3}$$

Folie 88

- *Verträglichkeitsregeln für die Gleichheit:*

(VR): Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $r := \mathrm{ar}(R)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_r)\\ \Gamma \vdash t_1 = u_1\\ \quad\vdots\\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash R(u_1, \ldots, u_r)}$$

(VF): Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$ und für $r := \mathrm{ar}(f)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = u_1\\ \quad\vdots\\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash f(t_1, \ldots, t_r) = f(u_1, \ldots, u_r)}$$

Beweis:

- (SG):

$$\begin{array}{llll}(1) & \Gamma & \vdash\ t = u & \text{(Voraussetzung)}\\ (2) & \Gamma & \vdash\ t = t & \text{(G)}\\ (3) & \Gamma, t = u & \vdash\ u = t & \text{(S) auf (2) mit } \varphi :=\ x = t\\ (4) & \Gamma & \vdash\ u = t & \text{(KS) auf (1),(3)}\end{array}$$

- (TG):

$$\begin{array}{llll}(1) & \Gamma & \vdash\ t_1 = t_2 & \text{(Voraussetzung)}\\ (2) & \Gamma & \vdash\ t_2 = t_3 & \text{(Voraussetzung)}\\ (3) & \Gamma, t_2 = t_3 & \vdash\ t_1 = t_3 & \text{(S) auf (1) mit } \varphi :=\ t_1 = x,\\ & & & \quad t := t_2,\ u := t_3\\ (4) & \Gamma & \vdash\ t_1 = t_3 & \text{(KS) auf (2),(3)}\end{array}$$

- (VR): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog).

(1)	Γ	$\vdash$	$R(t_1, t_2)$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_1 = u_1$	(Voraussetzung)
(3)	Γ	$\vdash$	$t_2 = u_2$	(Voraussetzung)
(4)	$\Gamma, t_1 = u_1$	$\vdash$	$R(u_1, t_2)$	(S) auf (1) mit $\varphi := R(x, t_2)$, $t := t_1$, $u := u_1$
(5)	Γ	$\vdash$	$R(u_1, t_2)$	(KS) auf (2), (4)
(6)	$\Gamma, t_2 = u_2$	$\vdash$	$R(u_1, u_2)$	(S) auf (5) mit $\varphi := R(u_1, x)$, $t := t_2$, $u := u_2$
(7)	Γ	$\vdash$	$R(u_1, u_2)$	(KS) auf (3),(6)

- (VF): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog).

(1)	Γ	$\vdash$	$t_1 = u_1$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_2 = u_2$	(Voraussetzung)
(3)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$	(G)
(4)	$\Gamma, t_1 = u_1$	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$	(S) auf (3) mit $\varphi := f(t_1, t_2) = f(x, t_2)$
(5)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$	(KS) auf (1), (4)
(6)	$\Gamma, t_2 = u_2$	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$	(S) auf (5) mit $\varphi := f(t_1, t_2) = f(u_1, x)$
(7)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$	(KS) auf (2), (6)

Dies schließt den Beweis von Lemma 1.20 ab.

□

1.4 Widerspruchsfreiheit und das syntaktische Endlichkeitslemma

Folie 89

Definition 1.21 (Widerspruchsfreiheit)**.** Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **widerspruchsvoll**, falls es ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. widerspruchsvoll
Das heißt: Φ ist widerspruchsvoll, falls sich im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ein Widerspruch herleiten lässt.

(b) Φ heißt **widerspruchsfrei**, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist. widerspruchsfrei

Definition 1.22 (Erfüllbarkeit).

erfüllbar

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ heißt **erfüllbar**, falls es eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$ gibt.

Folie 90

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls (Korollar 1.15) folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 1.23.
Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Falls Φ erfüllbar ist, so ist Φ widerspruchsfrei.

Beweis:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine zu Φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$.
Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll. Dann gibt es gemäß Definition 1.21 ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Aus Korollar 1.15 folgt, dass $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$.
Natürlich können wir den Definitionsbereich von β so erweitern, dass $\mathcal{I}$ zu φ passt. Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$ gilt dann: $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. ↯

$\square$

Im Rest von Kapitel 1 werden wir den Vollständigkeitssatz (das heißt, die Aussage "$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$") dadurch beweisen, dass wir

1) zeigen, dass jede widerspruchsfreie Formelmenge Φ erfüllbar ist (dies ist die Aussage des so genannten **Erfüllbarkeitslemmas**, Lemma 1.28) und

2) zeigen, dass aus dem Erfüllbarkeitslemma folgt, dass für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \models \varphi$, so $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Dazu werden wir die im Folgenden zusammengestellten Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen benutzen.

Folie 91

Lemma 1.24. *Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:*

(a) Φ ist widerspruchsvoll $\iff$ für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$

(b) Φ ist widerspruchsfrei $\iff$ es gibt ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.[2]

---

[2] Notation: Wir schreiben $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$, um auszudrücken, dass nicht $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ gilt.

(c) Φ ist widerspruchsvoll $\iff$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$.

Beweis:

(a) „$\Longleftarrow$“ :
Gemäß Voraussetzung gilt für jedes beliebige $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Insbesondere ist Φ daher widerspruchsvoll.

„$\Longrightarrow$“ :
Gemäß Voraussetzung ist Φ widerspruchsvoll, das heißt es gibt ein $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\psi$. Gemäß Definition 1.14 gibt es dann $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenzen $\Gamma_1 \vdash \psi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar sind.
Dann ist für jede beliebige FO[σ]-Formel φ auch Folgendes in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar:

(1)	Γ_1	$\vdash$	ψ	
(2)	Γ_2	$\vdash$	$\neg\psi$	
(3)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	ψ	(E) auf (1)
(4)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	$\neg\psi$	(E) auf (2)
(5)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	φ	(W) auf (3), (4)

Somit gilt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ für jedes beliebige $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

(b) Folgt direkt aus (a).

(c) „$\Longrightarrow$“ :
Folgt direkt aus (a).

„$\Longleftarrow$“ :
Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Das heißt es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Sei φ eine beliebige FO[σ]-Formel. Wir zeigen im Folgenden, dass auch die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist. Daraus folgt direkt, dass für jedes $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. Gemäß (a) ist Φ daher widerspruchsvoll.

Gemäß Voraussetzung ist $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar. Eine

Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ erhalten wir wie folgt:

(1)	Γ	$\vdash$	$\exists v_0 \, \neg v_0 = v_0$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$\neg\forall v_0 \, v_0 = v_0$	(QA) siehe Lemma 1.19
(3)	$\emptyset$	$\vdash$	$v_0 = v_0$	(G)
(4)	$\emptyset$	$\vdash$	$\forall v_0 \, v_0 = v_0$	($\forall$S) auf (3)
(5)	Γ	$\vdash$	$\forall v_0 \, v_0 = v_0$	(E) auf (4)
(6)	Γ	$\vdash$	φ	(W) auf (5), (2).

Somit gilt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Daher ist Φ widerspruchsvoll. □

Folie 92

Lemma 1.25.
Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *ist widerspruchsvoll.*

(b) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi \iff \Phi \cup \{\varphi\}$ *ist widerspruchsvoll.*

(c) Falls Φ *widerspruchsfrei ist, so ist auch mindestens eine der beiden Mengen* $\Phi \cup \{\varphi\}$ *und* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *widerspruchsfrei.*

Beweis:

(a) „$\Longrightarrow$“ : Sei $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.
Gemäß der Regel (E) von $\mathfrak{K}_S$ gilt auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. Außerdem gilt gemäß der Regel (V) in $\mathfrak{K}_S$, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Somit ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.

„$\Longleftarrow$“ : Sei $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.
Wegen Lemma 1.24 (a) gilt dann $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ erhalten wir dann wie folgt:

(1)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	(gemäß Voraussetzung)
(2)	Γ, φ	$\vdash$	φ	(V)
(3)	Γ	$\vdash$	φ	(FU) auf (1), (2).

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. $\square_{\mathrm{a}}$

(b) Analog zu (a).

(c) Angenommen, sowohl $\Phi \cup \{\varphi\}$ als auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ wäre widerspruchsvoll. Aus (a) und (b) folgt dann: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Somit ist Φ widerspruchsvoll, also **nicht** widerspruchs**frei**. ☐

Dies beendet die Auflistung der Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen.
Das folgende — sehr einfache — Lemma wird später, beim Beweis des Vollständigkeitssatzes sowie auch beim Beweis des Endlichkeitssatzes (siehe nächstes Kapitel) sehr nützlich sein.

Folie 93

Lemma 1.26 (Das syntaktische Endlichkeitslemma)**.**
Für jedes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*
Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *jedes* $\Gamma \subseteq_e \Phi$ *ist widerspruchsfrei.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“ : Angenommen, $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 1.24 (c) gilt dann $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \, \neg v_0{=}v_0$. Nach Definition 1.14 gilt dann auch $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \, \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 1.24 (c) ist Φ somit widerspruchsvoll. ↯

„$\Longleftarrow$“ : Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.
Lemma 1.24 (c) ergibt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \; \neg v_0 = v_0$. Gemäß Definition 1.14 gibt es daher ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \; \neg v_0 = v_0$. Lemma 1.24 (c) ergibt wiederum, dass Γ widerspruchsvoll ist. ↯

☐

1.5 Der Vollständigkeitssatz

Folie 94

Satz 1.27 (Der Vollständigkeitssatz)**.**
Für alle Signaturen σ*, alle Formelmengen* $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle Formeln* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel für den Beweis des Vollständigkeitssatzes.

Lemma 1.28 (Erfüllbarkeitslemma).
Für alle Signaturen σ gilt: Jede widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Bevor wir Lemma 1.28 beweisen, zeigen wir zunächst, wie es genutzt werden kann, um den Vollständigkeitssatz zu beweisen.

Folie 95

Beweis von Satz 1.27 (Vollständigkeitssatz):

(b) „$\Longrightarrow$“ : Dies ist gerade die Aussage des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 1.28).

„$\Longleftarrow$“ : Korollar 1.23 (einfache Folgerung aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls).

(a) „$\Longrightarrow$“ : Korollar 1.15 (Korrektheit des Sequenzenkalküls).

„$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \models \varphi$. Angenommen, $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.
Aus Lemma 1.25 (a) folgt dann, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei und gemäß Erfüllbarkeitslemma also auch erfüllbar ist. Das heißt, es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Somit gilt $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. Laut Voraussetzung gilt aber $\Phi \models \varphi$ und daher gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. $\lightning$

$\square$

Der Rest von Kapitel 1 ist dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 1.28) gewidmet.
Dazu sei σ eine beliebige Signatur, und Φ sei im Folgenden eine fest gewählte, widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.
Ziel: Konstruiere eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Folie 96

Definition 1.29 (Termstruktur $\mathcal{A}_\Phi$ und Terminterpretation $\mathcal{I}_\Phi$).
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

$\mathcal{A}_\Phi$

(a) Die σ-Struktur $\mathcal{A}_\Phi$ ist folgendermaßen definiert

- $A_\Phi := T_\sigma$ (das heißt: das Universum von $\mathcal{A}_\Phi$ besteht aus der Menge aller σ-Terme).
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{\mathcal{A}_\Phi} := c$.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k) \;:=\; f(t_1, \ldots, t_k).$$

- Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ ist

$$R^{\mathcal{A}_\Phi} \;:=\; \big\{(t_1,\ldots,t_k) \in T_\sigma^k : \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1,\ldots,t_k)\big\}.$$

Die Struktur $\mathcal{A}_\Phi$ heißt **Termstruktur** von Φ. Termstruktur

(b) Die Belegung β_Φ: $\mathsf{VAR} \to A_\Phi$ ist definiert durch β_Φ

$$\beta_\Phi(x) \;:=\; x, \text{ für alle } x \in \mathsf{VAR}.$$

(c) Die σ-Interpretation $\mathcal{I}_\Phi := (\mathcal{A}_\Phi, \beta_\Phi)$ heißt **Terminterpretation** von Φ. $\mathcal{I}_\Phi$ Terminterpretation

Folie 97

Beobachtung 1.30.

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = t$.

(b) Für alle $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $t_1,\ldots,t_k \in T_\sigma$ gilt:

$$\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1,\ldots,t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1,\ldots,t_k).$$

Beweis: (a) folgt leicht per Induktion nach dem Aufbau von T_σ.
(b) lässt sich wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1,\ldots,t_k) &\overset{\text{Semantik von FO}[\sigma]}{\iff} \big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}_\Phi},\ldots,[\![t_k]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}\big) \in R^{\mathcal{A}_\Phi} \\
&\overset{(a)}{\iff} (t_1,\ldots,t_k) \in R^{\mathcal{A}_\Phi} \\
&\overset{\text{Def. 1.29}}{\iff} \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1,\ldots,t_k).
\end{aligned}$$

□

Beobachtung 1.31.
Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt $\mathcal{I}_\Phi \not\models t_1 = t_2$.
Somit gilt: Falls es Terme t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} t_1 = t_2$, so ist $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$.
Ziel: Modifiziere $\mathcal{I}_\Phi$ so zu einer σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$, dass für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Folie 98

Definition 1.32 (Kongruenzrelation $\sim$ auf T_σ)**.** Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

$\sim_\Phi$ Die zweistellige Relation $\sim_\Phi$ auf T_σ sei folgendermaßen definiert. Für alle $t, u \in T_\sigma$ gilt:

$$t \sim_\Phi u \quad :\Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} t = u.$$

Lemma 1.33. *Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.*

*(a) Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine **Äquivalenzrelation** auf T_σ.*

(b) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1, \ldots, t_k \sim_\Phi u_k$ gilt:

$$f(t_1, \ldots, t_k) \ \sim_\Phi \ f(u_1, \ldots, u_k).$$

(c) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1, \ldots, t_k \sim_\Phi u_k$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(u_1, \ldots, u_k).$$

Beweis:

(a) Folgt mit (G), (SG), (TG).

(b) Folgt mit (VF).

(c) Folgt mit (VR). □

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 1.33 erhalten wir:

Folie 99

Korollar 1.34. *Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.*

Kongruenzrelation *Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine **Kongruenzrelation** auf $\mathcal{A}_\Phi$, das heißt es gilt:*

(a) $\sim_\Phi$ ist eine Äquivalenzrelation auf A_Φ.

(b) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und für alle $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ gilt:

$$f^{\mathcal{A}_\Phi}(a_1, \ldots, a_k) \ \sim_\Phi \ f^{\mathcal{A}_\Phi}(b_1, \ldots, b_k).$$

(c) *Für alle Relationssymbole* $R \in \sigma$, *für* $k := \mathrm{ar}(R)$ *und für alle* $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ *mit* $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ *gilt:*

$$\mathcal{A}_\Phi \models R(a_1, \ldots, a_k) \iff \mathcal{A}_\Phi \models R(b_1, \ldots, b_k).$$

Wir betrachten nun die σ-Struktur, die man aus $\mathcal{A}_\Phi$ erhält, indem man alle bezüglich $\sim_\Phi$ äquivalenten Elemente in A_Φ miteinander identifiziert.

Folie 100

Definition 1.35 (Die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$, die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Für jedes $t \in T_\sigma$ sei

$[t]_\Phi$

$$[t]_\Phi \;:=\; \{u \in T_\sigma : t \sim_\Phi u\}$$

die **Äquivalenzklasse** von t bezüglich $\sim_\Phi$ in T_σ.

(b) Die σ-Struktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ sei folgendermaßen definiert

$[\mathcal{A}_\Phi]$
reduzierte Termstruktur

(I) Das Universum von $[\mathcal{A}_\Phi]$ ist die Menge

$$[A_\Phi] \;:=\; \{\; [t]_\Phi \;:\; t \in T_\sigma \;\}$$

(das heißt: $[A_\Phi]$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von σ-Termen).

(II) Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{[\mathcal{A}_\Phi]} := [c]_\Phi$.

(III) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ ist

$$R^{[\mathcal{A}_\Phi]} \;:=\; \Big\{ \big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi\big) : (t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathcal{A}_\Phi} \Big\}.$$

Folie 101

(IV) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$f^{[\mathcal{A}_\Phi]}\Big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi\Big) \;:=\; \big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k)\big]_\Phi.$$

Beachte: Dies ist **wohldefiniert**, da gemäß Korollar 1.34 (b) für alle $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $[t_1]_\Phi = [u_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi = [u_k]_\Phi$ gilt:

$$\big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k)\big]_\Phi \;=\; \big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(u_1, \ldots, u_k)\big]_\Phi.$$

Die σ-Struktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ heißt **reduzierte Termstruktur** von Φ.

$[\beta_\Phi]$

(c) Die Belegung $[\beta_\Phi]$: $\mathsf{VAR} \to [A_\Phi]$ ist für alle $x \in \mathsf{VAR}$ definiert durch

$$[\beta_\Phi](x) \ := \ \big[\beta_\Phi(x)\big]_\Phi \ = \ [x]_\Phi.$$

$[\mathcal{I}_\Phi]$

reduzierte Terminterpretation

Folie 102

(c) Die σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi]{:=} \big([\mathcal{A}_\Phi], [\beta_\Phi]\big)$ heißt **reduzierte Terminterpretation** von Φ.

Lemma 1.36.

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $\ [\![t]\!]^{[\mathcal{I}_\Phi]} \ = \ [t]_\Phi$.

*(b) Für alle **atomaren** $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ gilt:* $\ [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen; Details: Übung. ☐

Eigentlich würden wir gern zeigen, dass Teil (b) von Lemma 1.36 nicht nur für **atomare** Formeln, sondern für **alle** Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt — dann wären wir auch mit dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas fertig, da für alle $\varphi \in \Phi$ natürlich $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ gilt. Leider lässt sich Teil (b) von Lemma 1.36 nur dann auf **alle** $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln verallgemeinern, wenn die Menge Φ die folgenden Eigenschaften hat:

Folie 103

Definition 1.37. Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

negationstreu

(a) Φ heißt **negationstreu**, wenn für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi.$$

enthält Beispiele

(b) Φ **enthält Beispiele**, wenn für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$ (mit $x \in \mathsf{VAR}$ und $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$) gilt: Es gibt einen Term $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \ \vdash_{\mathfrak{K}_S} \ \big(\exists x\, \varphi \to \varphi\tfrac{t}{x}\big).$$

Der folgende Satz besagt, dass das Erfüllbarkeitslemma für alle widerspruchsfreien Formelmengen Φ gilt, die **negationstreu** sind und **Beispiele enthalten**.

Satz 1.38 (Der Satz von Henkin). *Sei* σ *eine Signatur.* Satz von Henkin
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ *eine Formelmenge, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält. Dann gilt für jedes* $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$*:*

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \quad\iff\quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Beachte: *Daraus folgt insbesondere, dass* $[\mathcal{I}_\Phi] \models \Phi$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von $\text{FO}[\sigma]$.

Zur Erinnerung: In diesem Kapitel fassen wir die Junktoren „$\rightarrow$“ und „$\leftrightarrow$“ als Abkürzungen für die entsprechenden Kombinationen aus $\wedge, \vee, \neg$ auf. Daher betrachten wir „$\rightarrow$“ und „$\leftrightarrow$“ in diesem Beweis nicht.

Induktionsanfang: φ atomar.
Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.36 (b).

Induktionsschritt: Wir betrachten folgende Fälle:

- $\varphi = \neg\varphi_1$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_\Phi] \models \neg\varphi_1 \quad &\iff \quad [\mathcal{I}_\Phi] \not\models \varphi_1 \\ &\underset{\text{Ind.annahme}}{\iff} \quad \Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \\ &\underset{\Phi\text{ negationstreu u. wid.frei}}{\iff} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1 \end{aligned}$$

- $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_\Phi] \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \quad &\iff \quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \quad \text{oder} \quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_2 \\ &\underset{\text{Ind.annahme}}{\iff} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_2 \\ &\iff \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\varphi_1 \vee \varphi_2) \end{aligned}$$

  Die letzte Äquivalenz ergibt sich wie folgt:
  „$\Longrightarrow$“ : Folgt unmittelbar aus der Sequenzenregel ($\vee$S).
  „$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Falls $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1$, so gilt wegen der Negationstreue, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1$. Aus $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ folgt mit der Regel (DS) („Disjunktiver Syllogismus“, siehe Lemma 1.17), dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_2$.

- $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: Übung!

- $\varphi = \exists x\, \varphi_1$:

  „$\Longrightarrow$“ : Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x\, \varphi_1$.
  Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gibt es also ein $t \in T_\sigma$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]_\Phi}{x} \models \varphi_1$. Aus dem Substitutionslemma (Lemma 0.42) und wegen $[t]_\Phi = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}$ folgt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$.
  Gemäß Induktionsannahme gilt dann: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1\frac{t}{x}$.
  Wegen der Sequenzenregel (∃S) folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\, \varphi_1$.

  „$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\, \varphi_1$.
  Nach Voraussetzung enthält Φ Beispiele, das heißt es gibt ein $t \in T_\sigma$, so dass

  $$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\exists x\ \varphi_1 \ \rightarrow\ \varphi_1\tfrac{t}{x}).$$

  Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\, \varphi_1$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\exists x\ \varphi_1 \ \rightarrow\ \varphi_1\frac{t}{x})$. Die ableitbare Sequenzenregel (MP) („Modus Ponens“, siehe Lemma 1.17) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1\frac{t}{x}$. Gemäß Induktionsannahme folgt, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$. Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = [t]_\Phi$ liefern, dass

  $$[\mathcal{I}_\Phi]\tfrac{[t]_\Phi}{x} \models \varphi_1.$$

  Somit gilt $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x\ \varphi_1$.

- $\varphi = \forall x\ \varphi_1$:

  „$\Longrightarrow$“ : Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \forall x\, \varphi_1$.
  Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gilt also **für alle** $t \in T_\sigma$, dass $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]}{x} \models \varphi_1$.
  Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = [t]_\Phi$ liefern, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$.
  Gemäß Induktionsannahme folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1\frac{t}{x}$. Somit gilt **für jedes** $t \in T_\sigma$, dass

  $$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1\tfrac{t}{x}. \qquad (*)$$

  Angenommen, $\Phi \nvdash_{\mathfrak{K}_S} \forall x\, \varphi_1$. Die Negationstreue von Φ liefert dann, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\forall x\, \varphi_1$. Die Quantorenaustauschregel (QA) (siehe Lemma 1.19) liefert dann, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\ \neg\varphi_1$. Da Φ Beispiele enthält, gibt es einen Term $u \in T_\sigma$, so dass

  $$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\exists x\, \neg\varphi_1 \ \rightarrow\ \neg\varphi_1\tfrac{u}{x}).$$

  Die Modus Ponens Regel (MP) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1\frac{u}{x}$. Aber $(*)$ liefert auch, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1\frac{u}{x}$. Dies steht im Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit von Φ.

  „$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \forall x\, \varphi_1$.

Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi_1$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist. Für jedes beliebige $t \in T_\sigma$ sind folgende Sequenzen in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar:

(1)	Γ	$\vdash$	$\forall x\, \varphi_1$	(gemäß Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \varphi_1\frac{t}{x}$	$\vdash$	$\varphi_1\frac{t}{x}$	(V)
(3)	$\Gamma, \forall x\, \varphi_1$	$\vdash$	$\varphi_1\frac{t}{x}$	($\forall$A) auf (2)
(4)	Γ	$\vdash$	$\varphi_1\frac{t}{x}$	(KS) auf (1), (3)

Somit gilt für jedes $t \in T_\sigma$, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1\frac{t}{x}$. Die Induktionsannahme liefert, dass für jedes $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$. Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gilt also: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \forall x\, \varphi_1$.
Dies schließt den Beweis des Satzes von Henkin ab. ☐

Im Folgenden werden wir versuchen, eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ zu einer Menge $\Theta \supseteq \Phi$ zu erweitern, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält.
Um dies zu erreichen, werden wir zunächst nur Signaturen σ betrachten, die höchstens abzählbar groß sind. Wir gehen in zwei Schritten vor, die in den beiden folgenden Lemmas durchgeführt werden.

Folie 104

Lemma 1.39.
Sei σ eine ***abzählbare*** *Signatur, und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge bei der*

$$\textit{die Menge } \mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Phi) \textit{ unendlich ist.} \tag{1.1}$$

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

Bemerkung: Die Voraussetzung (1.1) ist wichtig; vergleiche Aufgabe 1.10.

Beweis: Sei

$$\exists x_1\, \varphi_1, \quad \exists x_2\, \varphi_2, \quad \exists x_3\, \varphi_3, \quad \ldots$$

eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln, die mit einem $\exists$-Quantor beginnen.
Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist; Details: Übung (Aufgabe 1.11).

Sei $\Psi_0 := \Phi$. Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ eine Formel ψ_n und eine Formelmenge $\Psi_n := \Psi_{n-1} \cup \{\psi_n\} = \Phi \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ wie folgt: Zu $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei y_n die erste Variable in VAR die **nicht** in $\mathrm{frei}(\Psi_{n-1} \cup \{\varphi_n\})$

vorkommt (eine solche Variable existiert, da $|\mathsf{VAR} \setminus \text{frei}(\Phi)| = \infty$ ist und daher $\mathsf{VAR} \setminus \text{frei}(\Psi_{n-1} \cup \{\varphi_n\}) \neq \emptyset$). Setze

$$\psi_n \ := \ \left(\exists x_n\, \varphi_n \ \to \ \varphi_n \tfrac{y_n}{x_n}\right).$$

Es sei

$$\Psi \ := \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n \ = \ \Phi \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$$

Klar: Gemäß Konstruktion von Ψ gilt: Ψ enthält Beispiele.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ψ_n ist widerspruchsfrei.

Beweis: Per Induktion nach n.

$n = 0$:
$\Psi_0 = \Phi$ ist widerspruchsfrei gemäß der Voraussetzung von Lemma 1.39.

$n{-}1 \to n$:
Angenommen, Ψ_n ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 1.24 (c) gilt dann

$$\Psi_n \ \vdash_{\mathfrak{K}_S} \ \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0.$$

Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Psi_n$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Fall 1: $\psi_n \notin \Gamma$:
Dann ist $\Gamma \subseteq \Psi_{n-1}$, und daher $\Psi_{n-1} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Gemäß 1.24 (c) ist Ψ_{n-1} also widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch zur Induktionsannahme

Fall 2: $\psi_n \in \Gamma$:
Sei $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\psi_n\}$. Insbesondere gilt: $\Gamma' \subseteq_e \Psi_{n-1}$.
Da die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist, sind auch die folgenden Sequenzen in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar:

(1)	Γ', ψ_n	$\vdash$	$\exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(da $\Gamma = \Gamma' \cup \{\psi_n\}$)
(2)	$\Gamma', \big(\neg\exists x_n\, \varphi_n\ \vee\ \varphi_n\frac{y_n}{x_n}\big)$	$\vdash$	$\exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	$\big($da $\psi_n = (\exists x_n\, \varphi_n\ \rightarrow\ \varphi_n\frac{y_n}{x_n})\big)$
(3)	$\Gamma', \neg\exists x_n\ \varphi_n$	$\vdash$	$\neg\exists x_n\ \varphi_n$	(V)
(4)	$\Gamma', \neg\exists x_n\ \varphi_n$	$\vdash$	$(\neg\exists x_n\ \varphi_n\ \vee\ \varphi_n\frac{y_n}{x_n})$	($\vee$S$_1$) auf (3)
(5)	$\Gamma', \neg\exists x_n\ \varphi_n$	$\vdash$	$\exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(KS) auf (4), (2)
(6)	$\Gamma', \varphi_n\frac{y_n}{x_n}$	$\vdash$	$\varphi_n\frac{y_n}{x_n}$	(V)
(7)	$\Gamma', \varphi_n\frac{y_n}{x_n}$	$\vdash$	$\big(\neg\exists x_n\ \varphi_n \vee\ \varphi_n\frac{y_n}{x_n}\big)$	($\vee$S$_2$) auf (6)
(8)	$\Gamma', \varphi_n\frac{y_n}{x_n}$	$\vdash$	$\exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(KS) auf (7), (2)
(9)	$\Gamma', \exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash$	$\exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	($\exists$A) auf (8)
(10)	Γ'	$\vdash$	$\exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(FU) auf (9), (5).

Das heißt, die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ ist in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar. Da $\Gamma' \subseteq \Psi_{n-1}$ ist, gilt also $\Psi_{n-1} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 1.24 (c) ist Ψ_{n-1} also widerspruchsvoll.

↯ Widerspruch zur Induktionsannahme

Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge Ψ_n widerspruchsfrei ist. Da $\Psi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$ ist, ist daher auch die Menge Ψ widerspruchsfrei (Details: Übung; siehe Aufgabe 1.12).

$\square$Lemma 1.39

Lemma 1.40.
Sei σ eine ***abzählbare*** *Signatur, und sei $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge. Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \supseteq \Psi$, die negationstreu ist.*

Beweis:
Sei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln.
Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist (vgl. Aufgabe 1.11).

Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formelmenge Θ_n wie folgt:
$\Theta_0 \ := \ \Psi$, und für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist

$$\Theta_n \ := \begin{cases} \Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\} & \text{, falls } \Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist.} \\ \Theta_{n-1} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Sei $\Theta := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Theta_n$.

Behauptung 1. Θ ist negationstreu.

Beweis:
Sei φ eine beliebige $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel. Da $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, so dass $\varphi = \varphi_n$ ist.
Wir müssen zeigen, dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_n$ oder $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_n$ gilt. Dazu betrachten wir zwei Fälle:
Fall 1: $\varphi_n \in \Theta$:
Dann gilt offensichtlich (gemäß Regel (V) von $\mathfrak{K}_S$), dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_n$.

Fall 2: $\varphi_n \notin \Theta$:
Dann gilt: $\varphi_n \notin \Theta_n$ (da $\Theta_n \subseteq \Theta$). Gemäß Definition der Menge Θ_n ist daher $\Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ widerspruchsvoll. Lemma 1.25 (b) liefert, dass $\Theta_{n-1} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_n$. Wegen $\Theta \supseteq \Theta_{n-1}$ gilt also: $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_n$.

$\square_{\text{Beh. 1}}$

Behauptung 2. Θ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Übung (Aufgabe 1.13). $\square_{\text{Beh. 2}}$

Die Gültigkeit von Lemma 1.40 folgt unmittelbar aus Behauptung 1 und Behauptung 2.

$\square_{\text{Lemma 1.40}}$

Wir können nun endlich das Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen beweisen:

Folie 105

Lemma 1.41 (Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen).
Sei σ eine ***abzählbare*** *Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge.*
Dann ist Φ erfüllbar.

Beweis:
Für jedes $\varphi \in \Phi$ sei φ' die wie folgt definierte Formel: Sei $n := |\operatorname{frei}(\varphi)|$ und seien $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ so dass $\operatorname{frei}(\varphi) = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$. Sei $\mathcal{S}$ die Substitution mit $\operatorname{Def}(\mathcal{S}) = \operatorname{frei}(\varphi)$ und $\mathcal{S}(v_{i_j}) = v_{2 \cdot i_j}$ für alle $j \in [n]$. Sei $\varphi' := \varphi\mathcal{S}$.
Wir setzen $\Phi' := \{\varphi' : \varphi \in \Phi\}$. Insbes. ist
$\operatorname{frei}(\Phi') = \{v_{2 \cdot i} : v_i \in \operatorname{frei}(\Phi)\} \subseteq \{v_{2 \cdot i} : i \in \mathbb{N}\}$. Es gilt:

(a) Die Menge $\mathsf{VAR} \setminus \operatorname{frei}(\Phi')$ ist unendlich, da keine der Variablen $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, \ldots$ frei in Φ' vorkommt.

(b) Φ' ist widerspruchsfrei, denn:

Angenommen Φ' wäre widerspruchsvoll. Dann gilt gemäß Lemma 1.24 (c), dass $\Phi' \vdash_{\mathfrak{K}_S} \perp$ für $\perp := \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Somit gibt es ein $\Gamma' \subseteq_e \Phi'$, so dass die Sequenz $\Gamma' \vdash \perp$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist. Insbes. ist Γ' widerspruchsvoll.

Sei $\Gamma := \{\varphi : \varphi' \in \Gamma'\}$. Klar: $\Gamma \subseteq_e \Phi$. Da Φ widerspruchsfrei ist, ist auch Γ widerspruchsfrei. Da Γ endlich ist, ist die Menge $\mathsf{VAR} \setminus \operatorname{frei}(\Gamma)$ unendlich. Gemäß Lemma 1.39 gibt es ein widerspruchsfreies $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Gamma \subseteq \Psi$, so dass Ψ Beispiele enthält. Gemäß Lemma 1.40 gibt es ein widerspruchsfreies $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \subseteq \Theta$, das negationstreu ist. Da Ψ Beispiele enthält, enthält auch Θ Beispiele. Der Satz von Henkin (Satz 1.38) liefert, dass Θ erfüllbar ist. Wegen $\Gamma \subseteq \Theta$ ist also Γ erfüllbar.

Das heißt es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Das heißt: $\mathcal{I} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Gamma$. Sei $\mathcal{I}' := (\mathcal{A}, \beta')$, wobei β' eine Belegung ist, für die für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\beta'(v_{2 \cdot i}) = \beta(v_i)$. Für jedes $\varphi \in \Gamma$ folgt aus $\mathcal{I} \models \varphi$ mit Hilfe des Koinzidenzlemmas und des Substitutionslemmas, dass $\mathcal{I}' \models \varphi'$ (Details: Übung!). Somit gilt: $\mathcal{I}' \models \Gamma'$, das heißt Γ' ist erfüllbar. Aus Korollar 1.23 folgt, dass Γ' widerspruchsfrei ist. Widerspruch (da Γ' ja widerspruchsvoll ist)!

(c) Wenn Φ' erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar, denn:

Aus einer Interpretation, die Φ' erfüllt, lässt sich leicht eine Interpretation bilden, die Φ erfüllt (Details: Übung!).

Wegen (c) genügt es zu zeigen, dass Φ' erfüllbar ist. Wegen (a) und (b) erfüllt Φ' die Voraussetzungen von Lemma 1.39. Daher gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi'$, so dass Ψ Beispiele enthält.
Gemäß Lemma 1.40 gibt es eine negationstreue, widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \subseteq \Psi$. Da Ψ Beispiele enthält, enthält auch Θ Beispiele.

Der Satz von Henkin (Satz 1.38) liefert, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Theta$. Wegen $\Phi' \subseteq \Theta$ gilt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Phi'$. Somit ist Φ' erfüllbar. Gemäß (c) ist daher auch Φ erfüllbar.

□

Insgesamt ist damit der Beweis der Erfüllbarkeitslemmas und damit auch der Beweis des Vollständigkeitssatzes für den Spezialfall, dass σ eine abzählbare Signatur ist, abgeschlossen. Im Folgenden werden wir versuchen, das Erfüllbarkeitslemma auch für überabzählbar große Signaturen zu beweisen.

1.5.1 Beweis des Vollständigkeitssatzes für beliebige Signaturen

Wir nutzen folgende Notationen:

Folie 106

Notation 1.42.

- Für eine Signatur σ schreiben wird $\mathfrak{K}_\sigma$, um den bezüglich σ definierten Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ zu bezeichnen.

widersprüchsvoll bezüglich $\hat{\sigma}$

- Sind σ und $\hat{\sigma}$ Signaturen mit $\sigma \subseteq \hat{\sigma}$ und ist $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, so heißt Φ **widerspruchsvoll bezüglich** $\hat{\sigma}$, falls es eine FO$[\hat{\sigma}]$-Formel φ gibt, so dass
$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \varphi \quad \text{und} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \neg\varphi.$$

widerspruchsfrei bezüglich $\hat{\sigma}$

- Φ heißt **widerspruchsfrei bezüglich** $\hat{\sigma}$, falls Φ nicht widerspruchsvoll bezüglich $\hat{\sigma}$ ist.

Um das Erfüllbarkeitslemma für *beliebige* Signaturen zu beweisen, benutzen wir die folgenden Varianten von Lemma 1.39 und Lemma 1.40.

Folie 107

Lemma 1.39'.
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die bezüglich σ widerspruchsfrei ist. Dann gibt es eine Signatur $\hat{\sigma} \supseteq \sigma$ und eine Formelmenge $\Psi \subseteq \text{FO}[\hat{\sigma}]$, für die gilt:

(1) $\Phi \subseteq \Psi$

(2) Ψ *ist widerspruchsfrei bezüglich* $\hat{\sigma}$.

(3) Ψ *enthält Beispiele bezüglich* $\hat{\sigma}$*, das heißt für jede* $\mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$*-Formel der Form* $\exists x\varphi$ *(mit* $x \in \mathsf{VAR}$ *und* $\varphi \in \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$*) gibt es einen Term* $t \in T_{\hat{\sigma}}$*, so dass* $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \left(\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}\right)$.

Beweis:
Als Hilfsmittel zur Konstruktion von $\hat{\sigma}$ und Ψ werden wir folgende Konstruktion iteriert nutzen:

Sei τ eine beliebige Signatur. Für jede $\mathrm{FO}[\tau]$-Formel φ sei c_φ ein neues Konstantensymbol, das nicht in τ vorkommt (so dass für $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\tau]$ mit $\varphi \neq \psi$ auch $c_\varphi \neq c_\psi$ ist). Wir setzen

$$\widetilde{\tau} := \tau \cup \left\{ c_{\exists x\varphi} \ : \ \exists x\,\varphi \in \mathrm{FO}[\tau] \right\}$$
$$B(\tau) := \left\{ \left(\exists x\varphi \to \varphi \frac{c_{\exists x\varphi}}{x} \right) \ : \ \exists x\,\varphi \in \mathrm{FO}[\tau] \right\}$$

Behauptung 1. Für jede Signatur τ und jede bezüglich τ widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\tau]$ gilt für die Formelmenge $\widetilde{\Phi} := \Phi \cup B(\tau)$:

(a) Jede endliche Teilmenge $\widetilde{\Gamma} \subseteq_e \widetilde{\Phi}$ ist erfüllbar.

(b) $\widetilde{\Phi}$ ist widerspruchsfrei bezüglich $\widetilde{\tau}$.

Beweis von Behauptung 1:
Teil (b) folgt leicht aus (a), denn: Angenommen $\widetilde{\Phi}$ wäre widerspruchsvoll bezüglich $\widetilde{\tau}$. Dann gibt es $\Gamma \subseteq_e \widetilde{\Phi}$ so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_{\widetilde{\tau}}} \bot$ (für $\bot := \exists v_0 \neg v_0 = v_0$). Gemäß (a) ist Γ erfüllbar, das heißt es gibt eine $\widetilde{\tau}$-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen der Korrektheit des Sequenzenkalküls gilt $\mathcal{I} \models \bot$. $\lightning$

Beweis von (a): Sei $\widetilde{\Gamma} \subseteq_e \widetilde{\Phi}$ beliebig: Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass es eine $\widetilde{\tau}$-Interpretation $\widetilde{\mathcal{I}}$ gibt, s.d. $\widetilde{\mathcal{I}} \models \widetilde{\Gamma}$.
Sei $\Gamma := \widetilde{\Gamma} \cap \Phi$. Klar: $\Gamma \subseteq_e \Phi$.
Sei $\Delta := \widetilde{\Gamma} \backslash \Gamma$. Klar: $\Delta \subseteq_e B(\tau)$. Sei $n := |\Delta|$ und sei $(\exists x_1\varphi_1 \to \varphi_1\frac{c_{\exists x_1\varphi_1}}{x}), \ldots, (\exists x_n\varphi_n \to \varphi_n\frac{c_{\exists x_n\varphi_n}}{x})$ eine Auflistung aller Formeln aus Δ.
Sei τ' die Menge aller Elemente aus τ, die in mindestens einer Formel aus $\Gamma \cup \{\exists x_i\varphi_i \ : \ i \in \{1, \ldots, n\}\}$ vorkommen.
Klar: τ' ist endlich (also auch abzählbar). Da Φ widerspruchsfrei bezüglich τ ist, ist auch Γ widerspruchsfrei bzgl. τ und daher erst recht widerspruchsfrei bzgl. τ' (da $\tau' \subseteq \tau$)

Somit gilt: τ' ist eine abzählbare Signatur und $\Gamma \subseteq \mathrm{FO}[\tau']$ ist widerspruchsfrei bzgl. τ'. Gemäß Lemma 1.41 ist Γ erfüllbar.
Das heißt es gibt eine τ'-Interpretation $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}', \beta)$ mit $\mathcal{I}' \models \Gamma$.
Ziel: Expandiere $\mathcal{I}'$ zu einer $\widetilde{\tau}$-Interpretation $\widetilde{\mathcal{I}}$, die auch alle Formeln aus Δ erfüllt.
Dazu lege für jedes Symbol in $\tau \backslash \tau'$ eine beliebige Interpretation über dem Universum von $\mathcal{A}'$ fest und schreibe $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, um die dadurch erhaltene τ-Expansion von $\mathcal{I}'$ zu bezeichnen.
Wegen $\mathcal{I}' \models \Gamma$ gilt gemäß Koinzidenzlemma, dass auch $\mathcal{I} \models \Gamma$.
Um nun noch geeignete Interpretationen für die Konstantensymbole in $\widetilde{\tau} \backslash \tau$ festzulegen gehen wir wie folgt vor:
Halte ein beliebiges Element a im Universum A von $\mathcal{A}$ fest. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ tue Folgendes:

- Falls $\mathcal{I} \models \exists x_i\, \varphi_i$, so gibt es $b_i \in A$ mit $\mathcal{I}\frac{b_i}{x_i} \models \varphi_i$.
- Fall $\mathcal{I} \not\models \exists x_i\, \varphi_i$, so setze $b_i = a$.

Sei $\widetilde{\mathcal{I}} := (\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\beta})$ die $\widetilde{\tau}$ -Expansion von $\mathcal{I}$ mit $c^{\widetilde{\mathcal{A}}}_{\exists x_i\ \varphi_i} := b_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $c^{\widetilde{\mathcal{A}}} := a$ für alle Konstantensymbole $c \in \widetilde{\tau} \setminus (\tau \cup \{c_{\exists x_i \varphi_i} \ : \ i \in \{1, \ldots, n\}\})$. Gemäß Koinzidenzlemma gilt $\widetilde{\mathcal{I}} \models \Gamma$ (da $\mathcal{I} \models \Gamma$). Außerdem gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$: Falls $\widetilde{\mathcal{I}} \models \exists x_i\, \varphi_i$, so $\widetilde{\mathcal{I}} \models \varphi_i \frac{c_{\exists x_i\ \varphi_i}}{x_i}$ (gemäß unserer Wahl von b_i und dem Substitutionslemma). Also gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$: $\widetilde{\mathcal{I}} \models \left(\exists x_i\, \varphi_i \to \varphi_i \frac{c_{\exists x_i \varphi_i}}{x_i}\right)$. Also gilt $\widetilde{\mathcal{I}} \models \Gamma \cup \Delta = \widetilde{\Gamma}$, das heißt Γ ist erfüllbar.

$\square_{\text{Behauptung 1}}$

Wir wenden nun Teil (b) von Behauptung 1 iteriert an. Setze

$$\begin{array}{llll} \sigma_0 := \sigma & \text{und} & \sigma_{n+1} := \widetilde{\sigma_n} & \text{für alle } n \in \mathbb{N} \\ \Phi_0 := \Phi & \text{und} & \Phi_{n+1} := \widetilde{\Phi_n} & \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Gemäß Konstruktion gilt

- $\sigma = \sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \ldots$
- $\Phi_n \subseteq \mathrm{FO}[\sigma_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\Phi = \Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots$

Gemäß der Voraussetzung ist Φ_0 widerspruchsfrei bezüglich σ_0. Per Induktion über n folgt mit Teil (b) von Behauptung 1, dass Φ_n widerspruchsfrei bezüglich σ_n ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\hat{\sigma} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n \qquad \text{und} \qquad \Psi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n.$$

Klar: $\Phi \subseteq \Psi$, also ist (1) von Lemma 1.39' erfüllt.

Behauptung 2. Ψ ist widerspruchsfrei bezüglich $\hat{\sigma}$.

Beweis von Behauptung 2:
Übung!

$\square_{\text{Behauptung 2}}$

Behauptung 3. Ψ enthält Beispiele bezüglich $\hat{\sigma}$.

Beweis von Behauptung 3:
Betrachte eine beliebige Formel $\exists x\, \varphi \in \text{FO}[\hat{\sigma}]$. Diese Formel enthält nur endlich viele Symbole aus $\hat{\sigma}$. Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\exists x\, \varphi \in \text{FO}[\sigma_n]$. Somit gehört die Formel $\big(\exists x\, \varphi \to \varphi\frac{c_{\exists x\, \varphi}}{x}\big)$ zur Menge $B(\sigma_n) \subseteq \Phi_{n+1} \subseteq \Psi$. Insbesondere ist $t := c_{\exists x\, \varphi} \in T_{\hat{\sigma}}$, so dass $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \big(\exists x\, \varphi \to \varphi\frac{t}{x}\big)$ gilt (wegen der Regel (V)).

$\square_{\text{Behauptung 3}}$

$\square_{\text{Lemma 1.39'}}$

Folie 108

Lemma 1.40'. *Sei $\hat{\sigma}$ eine Signatur und sei $\Psi \subseteq \text{FO}[\hat{\sigma}]$ eine bezüglich $\hat{\sigma}$ widerspruchsfreie Formelmenge. Dann gibt es eine Formelmenge Θ mit $\Psi \subseteq \Theta \subseteq \text{FO}[\hat{\sigma}]$, die bezüglich $\hat{\sigma}$ widerspruchsfrei und negationstreu ist.*

Klar: Falls Ψ bezüglich $\hat{\sigma}$ Beispiele enthält, so auch Θ.

Folie 109

Bevor wir Lemma 1.40' beweisen, schließen wir zunächst den Beweis des Erfüllbarkeitslemmas und des Vollständigkeitssatzes für beliebige Signaturen ab.

Lemma 1.28 (Erfüllbarkeitslemma).
Für alle Signaturen σ gilt: Jede widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Beweis von Lemma 1.28:
Nutze Lemma 1.39', um eine Signatur $\hat{\sigma} \supseteq \sigma$ und eine bezüglich $\hat{\sigma}$ widerspruchsfreie Formelmenge Ψ mit $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$ zu erhalten, die bezüglich $\hat{\sigma}$ Beispiele enthält.
Nutze dann Lemma 1.40', um eine bezüglich $\hat{\sigma}$ widerspruchsfreie und negationstreue Formelmenge Θ mit $\Psi \subseteq \Theta \subseteq \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$ zu erhalten, die - ebenso wie Ψ bzgl. $\hat{\sigma}$ Beispiele enthält.
Gemäß dem Satz von Henkin (Satz 1.38) ist Θ erfüllbar, und die reduzierte Terminterpretation $\mathcal{J} := [\mathcal{I}_\Theta]$ ist ein Modell von Θ. Wegen $\Phi \subseteq \Theta$ gilt: $\mathcal{J} \models \Phi$. Gemäß Koinzidenzlemma gilt für das σ-Redukt $\mathcal{I}$ der $\hat{\sigma}$-Interpretation $\mathcal{J}$ ebenfalls, dass $\mathcal{I} \models \Phi$.

$\square_{\text{Lemma } 1.28}$

Folie 110

Wie zu Beginn des Kapitels bereits gesehen, folgt aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls und aus dem Erfüllbarkeitslemma der

Satz 1.27 (Der Vollständigkeitssatz)**.**
Für alle Signaturen σ, alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch Lemma 1.40' beweisen. Zum Beweis von Lemma 1.40' nutzen wir das **Zornsche Lemma**. Als Hinführung zum Zornschen Lemma hier ein kleiner Exkurs.

1.5.2 Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz und Zornsches Lemma

Auswahlaxiom
AC

Das **Auswahlaxiom** (kurz: **AC** für „axiom of choice“) wurde 1904 von Zermelo eingeführt. Anfangs heftig umstritten, wird es heute in der Regel in der Mathematik als grundsätzliches Axiom akzeptiert und in Beweisen verwendet. Es besagt Folgendes:

Folie 111

Auswahlaxiom (AC)

Zu jeder Menge Y von nicht-leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Menge Y', die von jedem Element aus Y genau ein Element enthält. Eine solche Menge Y' wird auch **Auswahlmenge zu** Y genannt.

Man sieht leicht, dass das Auswahlaxiom äquivalent ist zu folgenden Aussage.

Auswahlfunktionen auf Potenzmengen $(*)$

Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer jeden nicht-leeren Menge M gibt es eine Auswahlfunktion, d. h. eine Funktion $f : \mathcal{P}(M) \to M$, die folgende Eigenschaft hat: Für alle $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ ist $f(X) \in X$.

(Das heißt: f ordnet via $x := f(X)$ jeder nicht-leeren Menge $X \subseteq M$ einen **Repräsentanten** $x \in X$ zu.)

Lemma 1.43. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu der Aussage* $(*)$.

Beweis:

AC $\Rightarrow$ $(*)$ Sei M eine beliebige Menge. Falls $M = \emptyset$, so ist nichts zu beweisen. Falls $M \neq \emptyset$, so betrachten wir die Menge

$$Y := \big\{\{(X, x) : x \in X\} : X \subseteq M \text{ mit } X \neq \emptyset\big\}$$

Klar: Y ist eine Menge, deren Elemente nicht-leere und zueinander disjunkte Mengen sind. Gemäß Auswahlaxiom gibt es eine Menge Y', die von jedem Element von Y genau ein Element enthält. Das heißt für jedes $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ gibt es genau ein $x_0 \in X$, so dass $(X, x_0) \in Y'$.
Die Funktion f, die jedem $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ dasjenige $x_0 \in X$ zuordnet, für das $(X, x_0) \in Y'$ ist, bezeugt, dass $(*)$ erfüllt ist.

$(*)$ $\Rightarrow$ AC Sei nun Y eine beliebige nicht-leere Menge von nicht-leeren, zueinander disjunkten Mengen. Sei $M := \bigcup_{X \in Y} X$. Somit ist $Y \subseteq \mathcal{P}(M)$ und $M \neq \emptyset$. Gemäß $(*)$ gibt es eine Auswahlfunktion $f : \mathcal{P}(M) \to M$, das heißt eine Funktion f, so dass für alle $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ gilt $f(X) \in X$. Dann enthält $Y' := \{f(X) : X \in Y\}$ von jedem Element von Y genau ein Element (das heißt Y' ist eine Auswahlmenge zu Y).

$\square$

Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass das Auswahlaxiom auch äquivalent zum Wohlordnungssatz ist (hier ohne Beweis).

Folie 112

Wohlordnungssatz (WOS)

Jede nicht-leere Menge M lässt sich **wohlordnen**, das bedeutet es gibt eine 2-stellige Relation $\prec \subseteq M \times M$, so dass $(M, \prec)$ eine **Wohlordnung** ist.

Der Begriff einer Wohlordnung ist dabei wie folgt definiert[3]

Folie 113

Wohlordnung

Definition 1.44 (Wohlordnung)**.** Sei M eine Menge und sei $\prec \subseteq M \times M$. Die Struktur $(M, \prec)$ heißt **Wohlordnung**, falls gilt:

strikte lineare Ordnung

(1) $(M, \prec)$ ist eine **strikte lineare Ordnung**, das heißt es gilt

   (i) $\prec$ ist irreflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \notin \prec$.

   (ii) $\prec$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \prec b$ und $b \prec c$ ist auch $a \prec c$.

   (iii) $\prec$ ist konnex, das heißt für alle $a, b \in M$ ist $a \prec b$ oder $a = b$ oder $b \prec a$.

   Beachte: Aus (i) und (ii) folgt, dass $\prec$ antisymmetrisch ist, das heißt für alle $a, b, \in M$ mit $a \prec b$ ist $(b, a) \notin \prec$.

fundiert

(2) $(M, \prec)$ ist **fundiert**, das heißt Jede nicht-leere Menge $X \subseteq M$ enthält eine bezüglich $\prec$ in X kleinstes Element, das heißt ein $x_0 \in X$, so dass es kein $x' \in X$ gibt mit $x' \prec x_0$.

   Beachte: Wegen (1) gilt also für alle $x' \in X$ mit $x' \neq x_0$, dass $x_0 \prec x'$.

Beispiel:

- Die natürliche strikte lineare Ordnung $<^{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Wohlordnung.
- Die natürlichen strikten linearen Ordnungen $<^{\mathbb{Z}}$, $<^{\mathbb{Q}}$ und $<^{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind **keine** Wohlordnungen. Gemäß des Wohlordnungssatzes lässt sich aber jede der Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ wohlordnen.

Zornschen Lemma

Ähnlich wie beider Äquivalenz von Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz kann man auch zeigen, dass das Auswahlaxiom äquivalent zum im Folgenden beschriebenen **Zornschen Lemma** ist (hier ohne Beweis).
Das Zornsche Lemma geht zurück auf Felix Hausdorff (1909). Max Zorn (1935) hat den grundlegenden Nutzen dieses Lemmas in der Algebra nachgewiesen.
Um das Zornsche Lemma zu formulieren, benötigen wir etwas Notation.

Folie 114

Definition 1.45 (Halbordnung)**.** Sei M eine Menge und sei $\preceq \subseteq M \times M$.

(a) Die Struktur $(M, \preceq)$ heißt **Halbordnung**, falls gilt:

Halbordnung

  (i) $\preceq$ ist reflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \in \preceq$.

  (ii) $\preceq$ ist antisymmetrisch, das heißt für alle $a, b \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq a$ ist $b = a$.

  (iii) $\preceq$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq c$ ist auch $a \preceq c$.

(b) Sei $(M, \preceq)$ eine Halbordnung.

- Eine **Kette in** $(M, \preceq)$ ist eine Menge $K \subseteq M$, so dass für alle Elemente $a, b \in K$ gilt: $a \preceq b$ oder $b \preceq a$. (das heißt alle Elemente in K sind bzgl. $\preceq$ miteinander vergleichbar)
- Ein Element $a \in M$ ist eine **obere Schranke einer Kette** K **in** $(M, \preceq)$, wenn für alle $b \in K$ gilt $b \preceq a$.

Kette in $(M, \preceq)$

obere Schranke einer Kette K in $(M, \preceq)$

(c) Sei $(M, \preceq)$ eine Halbordnung. Ein **maximales Element in** $(M, \preceq)$ ist ein Element $a \in M$, so dass es kein $b \in M$ mit $a \preceq b$ und $a \neq b$ gibt.

maximales Element in $(M, \preceq)$

Unter Verwendung dieser Notation können wir nun das Zornsche Lemma formulieren:

Folie 115

ZORNSCHES LEMMA

Für jede Halbordnung $(M, \preceq)$ gilt: Falls jede Kette K in $(M, \preceq)$ eine obere Schranke in M hat, so besitzt $(M, \preceq)$ ein maximales Element.

Wir nutzen nun das Zornsche Lemma, um Lemma 1.40' zu beweisen.

Beweis von Lemma 1.40':
Sei $\hat{\sigma}$ eine Signatur und sei $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$ widerspruchsfrei bezüglich $\hat{\sigma}$.
Ziel: Zeige, dass es eine Formelmenge Θ gibt, für die gilt:

(1) $\Psi \subseteq \Theta \subseteq \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$,

(2) Θ ist widerspruchsfrei bezüglich $\hat{\sigma}$ und

---

[3] Notation: Für $\prec$ und $\preceq \subseteq M \times M$ schreiben wir statt $(a, b) \in \prec$ (bzw. $\preceq$) auch $a \prec b$ bzw. $a \preceq b$.

(3) Θ ist negationstreu.

Betrachte die Menge

$$M := \big\{\Theta \,:\, \Psi \subseteq \Theta \subseteq \text{FO}[\hat{\sigma}] \text{ und } \Theta \text{ ist widerspruchsfrei bzgl. } \hat{\sigma}\big\}.$$

Klar:

- $M \neq \emptyset$, da $\Psi \in M$.
- Für die Teilmengenrelation " $\subseteq$ " auf M (mit $\Theta \subseteq \Theta' :\Leftrightarrow$ für alle $\varphi \in \Theta$ ist $\varphi \in \Theta'$) ist $(M, \subseteq)$ eine Halbordnung.

Behauptung 1. $(M, \subseteq)$ besitzt ein maximales Element, das heißt es gibt ein $\Theta \in M$, so dass es kein $\Theta' \in M$ mit $\Theta \subsetneq \Theta'$ gibt.

Beweis von Behauptung 1: Gemäß dem Zornschen Lemma genügt es zu zeigen, dass jede Kette in $(M, \subseteq)$ eine obere Schranke in M hat. Sei also $K \subseteq M$ eine beliebige Kette in $(M, \subseteq)$ (das heißt, für alle $\Theta, \Theta' \in K$ gilt: $\Theta \subseteq \Theta'$ oder $\Theta' \subseteq \Theta$) Falls $K = \emptyset$, so besitzt K offensichtlicherweise eine obere Schranke in M (nämlich Ψ) Falls $K \neq \emptyset$, so betrachte $\Theta_K := \bigcup\limits_{\Theta \in K} \Theta$.
Klar: Für jedes $\Theta \in K$ gilt: $\Theta \subseteq \Theta_K$
Um nachzuweisen, dass K eine obere Schranke in M hat, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass $\Theta_K \in M$ ist.
Wegen $K \neq \emptyset$ ist $\Psi \subseteq \Theta_K \subseteq \text{FO}[\hat{\sigma}]$ Außerdem ist Θ_K widerspruchsfrei bezüglich $\hat{\sigma}$, denn: Sei Γ eine beliebige endliche Teilmenge von Θ_K. Sei $n := |\Gamma|$ und seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$. Dann gibt es $\Theta_1, \ldots, \Theta_n \in K$, so dass $\varphi_i \in \Theta_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da K eine Kette in $(M, \subseteq)$ ist, gibt es eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, so dass
$\Theta_{\pi(1)} \subseteq \Theta_{\pi(2)} \subseteq \cdots \subseteq \Theta_{\pi(n)}$.
Also ist $\Gamma \subseteq \Theta_{\pi(n)}$. Wegen $\Theta_{\pi(n)} \in M$ ist $\Theta_{\pi(n)}$ widerspruchsfrei bezüglich $\hat{\sigma}$. Also ist auch Γ widerspruchsfrei bzgl. $\hat{\sigma}$. Somit ist jede endliche Teilmenge von Θ_K widerspruchsfrei bzgl. $\hat{\sigma}$. Also ist auch Θ_K widerspruchsfrei bzgl. $\hat{\sigma}$. Gemäß Definition von M ist also $\Theta_K \in M$, das heißt: Θ_K ist eine obere Schranke von K in M.

$\square_{\text{Behauptung 1}}$

Behauptung 2. Jedes maximale Element Θ in $(M, \subseteq)$ ist negationstreu.

Beweis von Behauptung 2: Wir wissen $\Psi \subseteq \Theta \subseteq \text{FO}[\hat{\sigma}]$, da $\Theta \in M$ und Θ widerspruchsfrei bzgl. $\hat{\sigma}$. Sei $\varphi \in \text{FO}[\hat{\sigma}]$ eine beliebige Formel.
Ziel: Zeige, dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \varphi$ oder $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \neg\varphi$

Falls $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \neg\varphi$ gilt, so sind wir fertig. Falls $\Theta \nvdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \neg\varphi$, so ist gemäß Lemma 1.25 (b) die Formelmenge $\Theta \cup \{\varphi\}$ widerspruchsfrei bezüglich $\hat{\sigma}$. Somit ist $\Theta \cup \{\varphi\} \in M$. Da Θ ein maximales Element von M ist, kann es nicht sein, dass $\Theta \subsetneq \Theta \cup \{\varphi\}$ ist. Somit muss $\varphi \in \Theta$ sein, und daher gilt insbesondere $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \varphi$. Also ist Θ negationstreu.

$\square_{\text{Behauptung 2}}$

Es ist klar, dass aus Behauptung 1 und Behauptung 2 direkt die Aussage von Lemma 1.40’ folgt.

$\square_{\text{Lemma 1.40'}}$

1.6 Literaturhinweise

Zur weiteren Lektüre werden die Kapitel 4–6 in [EFT98] empfohlen.

1.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1

Sei M eine Menge und sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über M.

Definition:

(a) Eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ über M heißt **in $\mathfrak{K}$ ableitbar**, wenn b aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathfrak{K}$ ableitbar ist.

(b) Zwei Kalküle $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ über M heißen **gleich stark**, wenn für alle $V \subseteq M$ gilt: Die Menge der aus V in $\mathfrak{K}_1$ ableitbaren Elemente ist gleich der Menge der aus V in $\mathfrak{K}_2$ ableitbaren Elemente.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n, b \in M$ gilt:
$\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ ist genau dann in $\mathfrak{K}$ ableitbar, wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K} \cup \left\{ \dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b} \right\}$ gleich stark sind.

Aufgabe 1.2

Leiten Sie die folgenden Sequenzen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ab. Hierbei sind x, y, z paarweise verschiedene Elemente aus VAR.

(a) $\forall x\ f(x,x){=}x \quad \vdash \quad \forall x\ \big(P(x)\ \vee\ \neg P(f(x,x))\big)$

(b) $\forall x\, \forall y\, \forall z\big((R(x,y) \land R(y,z)) \to R(x,z)\big) \;\land\; \forall x\, \neg R(x,x)$
$\vdash \;\; \forall x\, \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))$

Zur Erinnerung:
Im Rahmen des Vollständigkeitssatzes betrachten wir Formeln der Art $(\varphi \to \psi)$ stets als abkürzende Schreibweise für die Formel $(\neg\varphi \lor \psi)$.

Aufgabe 1.3
Zeigen Sie, dass die folgenden Regeln des Sequenzenkalküls $\mathfrak{K}_S$ korrekt sind.

(a)

$$(\land S): \quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi\\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \land \psi)}$$

(b)

$$(\exists A): \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma,\, \exists x\, \varphi \;\vdash\; \psi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\, \varphi, \psi)$$

Aufgabe 1.4
Zeigen Sie, dass die Regel $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \big((\varphi \land \psi) \to \chi\big)}$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Aufgabe 1.5
Betrachten Sie für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ die Regel

$$(\forall\exists) \quad \frac{}{\Gamma,\, \exists x\, \varphi \;\vdash\; \forall x\, \varphi}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ korrekt ist.

(b) Sei $\mathfrak{K}_S{}'$ der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob *jede* Sequenz in $\mathfrak{K}_S{}'$ ableitbar ist.

Aufgabe 1.6
Beweisen Sie Lemma 1.36.

Aufgabe 1.7
Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \land \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin (Satz 1.38) aus.

Aufgabe 1.8
Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.
Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ für die folgende Formelmenge

$$\begin{aligned}\Phi \;\; := \;\; & \{\, v_i = v_{i+2} \; : \; i \geqslant 1 \,\} \\ & \cup \{\; E(v_0, v_7), \; E(v_1, v_4), \; E(v_6, v_0), \; \forall v_1 \forall v_3 \, \big(\neg E(v_1, v_3) \vee E(v_3, v_1)\big) \;\}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.9(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ widerspruchsvoll. Wie sieht die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$ aus?

(b) Zeigen Sie Folgendes (wobei σ eine geeignete Signatur sei, die mindestens ein Relationssymbol enthält):

   (i) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Theta] \not\models \Theta$.
   Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\, \exists v_0 \, P(v_0) \,\} \cup \{\, \neg P(t) \; : \; t \in T_\sigma \,\}$

   (ii) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Psi] \not\models \Psi$.

   Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass im Satz von Henkin die beiden Forderungen, dass Φ negationstreu ist und Beispiele enthält, unverzichtbar sind.

Aufgabe 1.10

Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \quad := \quad \{\, v_0 = t \; : \; t \in T_\sigma \,\} \;\cup\; \{\; \exists v_0 \exists v_1 \, \neg v_0 = v_1 \;\}\,.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass in Lemma 1.39 die Forderung, dass $|\mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)| \;=\; \infty$ ist, unverzichtbar ist.

Aufgabe 1.11

Beweisen Sie, dass Folgendes gilt: Ist σ eine abzählbare Signatur, so ist die Menge aller FO[σ]-Formeln abzählbar.

Aufgabe 1.12

Arbeiten Sie die Details am Ende des Beweises von Lemma 1.39 aus, das heißt zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die im Beweis von Lemma 1.39 definierte Menge Ψ_n widerspruchsfrei, so ist auch die Menge $\Psi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$ widerspruchsfrei.

Aufgabe 1.13

Beweisen Sie Behauptung 2 aus dem Beweis von Lemma 1.40, das heißt, zeigen Sie, dass die im Beweis von Lemma 1.40 definierte Formelmenge Θ widerspruchsfrei ist.

Aufgabe 1.14

Zeigen Sie Folgendes:

(a) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\, \exists v_0\, P(v_0) \,\} \cup \{\, \neg P(t) \,:\, t \in T_\sigma \,\}$.

(b) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Aufgabe 1.15

Arbeiten Sie das folgende Detail aus dem Beweis von Lemma 1.40' aus:

> Sei K eine Kette in $(M, \subseteq)$, sei n eine natürliche Zahl $\geqslant 1$ und seien $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ Elemente aus K. Beweisen Sie, dass es eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $\Theta_{\pi(1)} \subseteq \Theta_{\pi(2)} \subseteq \cdots \subseteq \Theta_{\pi(n)}$ ist.

Aufgabe 1.16(a) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz folgt.

(b) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Zornschen Lemma folgt.

Kapitel 2

Der Endlichkeitssatz und die Sätze von Löwenheim und Skolem

2.1 Der Endlichkeitssatz

Endlichkeitssatz
Kompaktheitssatz

Der **Endlichkeitssatz** ist auch unter dem Namen **Kompaktheitssatz** bekannt. Unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel 1 kann der Endlichkeitssatz leicht gezeigt werden.

Folie 116

Satz 2.1 (Endlichkeitssatz bzw. Kompaktheitssatz)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge. Dann gilt:

*(a) Φ ist erfüllbar $\iff$ Jede **endliche** Teilmenge von Φ ist erfüllbar.*

(b) Für jedes $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \models \psi \quad\iff\quad \textit{Es gibt eine } \textbf{\textit{endliche}} \textit{ Menge } \Gamma \subseteq \Phi \textit{ mit } \Gamma \models \psi.$$

Folie 117

Beweis:

(a)

$$\begin{aligned} \Phi \text{ erfüllbar} &\underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \Phi \text{ widerspruchsfrei} \\ &\underset{\substack{\text{Lemma 1.26} \\ \text{(Syntakt. Endlichkeitslemma)}}}{\iff} \text{Jede endl. Teilmenge von } \Phi \text{ ist widerspruchsfrei.} \\ &\underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \text{Jede endliche Teilmenge von } \Phi \text{ ist erfüllbar.} \end{aligned}$$

(b) $\Phi \models \psi \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi$
$\iff$ es gibt ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi$
$\underset{\text{Vollst.satz}}{\iff}$ es gibt ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass $\Gamma \models \psi$.

□

Man kann den Endlichkeitssatz nutzen, um zu zeigen, dass bestimmte Klasse von Strukturen nicht FO[σ]-definierbar (in der Klasse **aller** σ-Strukturen) sind.
Zur Formulierung der Ergebnisse sind die folgenden Notationen nützlich:

Folie 118

Definition 2.2 (Modellklassen und Axiomatisierbarkeit)**.** Sei σ eine Signatur.

(a) Für eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen sei

$$\mathsf{MOD}_\sigma(\Phi) \ := \ \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \Phi\}$$

Modellklasse

die **Modellklasse** von Φ bezüglich σ.

axiomatisierbar
Δ-elementar

(b) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt (erststufig) **axiomatisierbar** (oder **Δ-elementar**), wenn es eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$.

endlich axiomatisierbar
elementar

(c) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt **endlich axiomatisierbar** (oder **elementar**), wenn es eine **endliche** Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$.

Folie 119

Beobachtung 2.3.
$\mathcal{K}$ ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn es einen FO[σ]-Satz φ mit $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\{\varphi\})$ gibt.

Korollar 2.4.
Für jede Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen gilt:

$$\mathcal{K} \textit{ ist elementar} \iff \mathcal{K}^C \ := \ \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \textit{ ist eine } \sigma\textit{-Struktur mit } \mathcal{A} \notin \mathcal{K}\}$$
ist endlich axiomatisierbar.

Beweis: Übung.

☐

Folie 120

Definition 2.5 (Mächtigkeit von Mengen)**.**
Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig** (kurz: $A \sim B$), wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **höchstens so mächtig** wie B (kurz: $A \preccurlyeq B$) und B heißt **mindestens so mächtig** wie A, wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **schmächtiger** (oder: **weniger mächtig**) als B (kurz: $A \prec B$), wenn es eine injektive, aber keine bijektive Abbildung von A nach B gibt.

gleichmächtig

schmächtiger

Definition 2.6.
Die **Mächtigkeit** einer σ-Struktur ist die Mächtigkeit ihres Universums.
Wir bezeichnen eine Menge M als **abzählbar**, wenn sie entweder endlich ist oder dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt. Eine Menge M heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.
Eine Struktur ist endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit besitzt.

Mächtigkeit

abzählbar

überabzählbar

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Folie 121

Satz 2.7.
*Für jede Signatur σ ist die Klasse aller **unendlichen** σ-Strukturen axiomatisierbar.*

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei

$$\varphi_n \quad := \quad \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i{=}x_j .$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi_n \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \geqslant n.$$

Somit gilt:

$$A \text{ ist unendlich} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}.$$

Das heißt: Die Menge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ axiomatisiert die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen.

☐

Im Folgenden zeigen wir, das die Klasse aller **endlichen** σ-Strukturen **nicht** axiomatisierbar ist.

Folie 122

Lemma 2.8. *Sei σ eine Signatur.*
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, für die Folgendes gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant n$ und eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $|A| = m$ und $\mathcal{A} \models \Phi$ (d.h. Φ besitzt beliebig große endliche Modelle). Dann besitzt Φ auch ein unendliches Modell, d.h., es gibt eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $|B| = \infty$ und $\mathcal{B} \models \Phi$.

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi_n \quad := \quad \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i{=}x_j .$$

Sei $\Phi' := \Phi \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$. Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt, dass jede **endliche** Teilmenge von Φ' ein Modell hat. Der Endlichkeitssatz liefert, dass auch Φ' ein Modell hat, d.h. es gibt eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models \Phi'$. Wegen $\mathcal{B} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ muss $\mathcal{B}$ unendlich sein.

☐

Daraus folgt direkt:

Folie 123

Satz 2.9 (Nicht-Axiomatisierbarkeit der Endlichkeit)**.**
Für jede Signatur σ gilt:

*(a) Die Klasse aller **endlichen** σ-Strukturen ist **nicht** axiomatisierbar.*

*(b) Die Klasse aller **unendlichen** σ-Strukturen ist **nicht** endlich axiomatisierbar.*

Beweis:

(a) Folgt direkt aus Lemma 2.8.

(b) Folgt aus (a) und Korollar 2.4.

☐

Auf ähnliche Weise kann man unter Verwendung des Endlichkeitssatzes auch Folgendes zeigen:

Satz 2.10 (Nicht-Axiomatisierbarkeit von Graph-Zusammenhang)**.**
Die Klasse

$$ZG \;:=\; \{\; G=(V,E^G) \;:\; \textit{V ist eine Menge, } E^G \subseteq V\times V \textit{ und f.a. } a,b\in V \textit{ gibt es in } E^G \textit{ einen Weg endlicher Länge von } a \textit{ nach } b \;\}$$

aller stark zusammenhängenden (endlichen oder unendlichen) gerichteten Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Beweis: Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $\psi_n(x,y)$ eine FO[σ]-Formel, die besagt, dass es einen Weg der Länge n von x nach y gibt. Das heißt:

$$\begin{aligned}\psi_0(x,y) \;&:=\; x{=}y, \qquad \text{und für alle } n\geqslant 1 \text{ ist}\\ \psi_n(x,y) \;&:=\; \exists x_0\,\exists x_1\cdots\exists x_n\,\Big(x_0{=}x \;\wedge\; x_n{=}y \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} E(x_{i-1},x_i)\Big).\end{aligned}$$

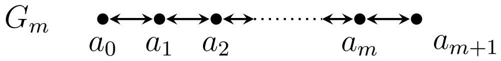
Somit gilt für alle Graphen $G=(V,E^G)$, für alle $a,b\in V$ und für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$G\models\psi_n[a,b] \iff \text{es gibt in } G \text{ einen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b.$$

Also gilt auch:

Es gibt in G **keinen** Weg endlicher Länge von a nach b
$\iff$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $G\models\neg\psi[a,b]$.

Angenommen, die Klasse ZG wäre axiomatisierbar durch eine Menge Φ von FO[E]-Formeln.
Dann ist die Menge $\Psi := \Phi\cup\{\neg\psi_n : n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ **unerfüllbar**.
Im Folgenden zeigen wir, dass jede **endliche** Teilmenge Γ von Ψ erfüllbar ist. Laut Endlichkeitssatz muss dann also auch Ψ erfüllbar sein. Widerspruch!
Sei also Γ eine endliche Teilmenge von Ψ. Sei $m := \max\{n\in\mathbb{N} : \neg\psi_n\in\Gamma\}$.
Sei G_m der Graph, der aus einer ungerichteten Kette aus $m{+}2$ Knoten besteht, d.h. $G_m=(V,E^{G_m})$ mit $V:=\{a_0,a_1,\dots,a_{m+1}\}$ und
$E^{G_m} := \{(a_{i-1},a_i),\ (a_i,a_{i-1}) : i\in\{1,\dots,m{+}1\}\}$.



Dann gilt:

1. $G_m \models \Phi$, da G_m stark zusammenhängend ist.
2. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leqslant m$ gilt: $G_m \models \neg\psi_n[a_0, a_{m+1}]$, da der kürzeste Weg von a_0 nach a_{m+1} in G_m die Länge $m{+}1$ hat.

Gemäß der Wahl von m gilt daher für die Belegung β mit $\beta(x) = a_0$ und $\beta(y) = a_{m+1}$:

$$(G_m, \beta) \models \Gamma.$$

Somit ist Γ erfüllbar.

□

2.2 Die Sätze von Löwenheim und Skolem

Folie 124

Satz 2.11 (Der Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei σ eine Signatur. Jede **abzählbare**, erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ besitzt ein abzählbares Modell.*

Beweis:
Sei Φ eine abzählbare, erfüllbare Menge von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln. Sei σ' die Menge aller in Φ vorkommenden Symbole aus σ. Da Φ abzählbar ist, ist auch σ' abzählbar.
O.B.d.A. können wir außerdem annehmen, dass $\mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)$ unendlich ist $\big($ansonsten ersetzen wir – wie im Beweis von Lemma 1.41 – in jeder Formel $\varphi \in \Phi$ jede freie Variable v_i durch die Variable v_{2i} (für $i \in \mathbb{N}$)$\big)$.
Da Φ erfüllbar ist, ist Φ gemäß Vollständigkeitsatz auch widerspruchsfrei (sowohl bzgl. σ als auch bzgl. σ'). Gemäß Lemma 1.39 und Lemma 1.40 gibt es daher eine widerspruchfreie, negationstreue Menge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma']$ mit $\Theta \supseteq \Phi$, die Beispiele enthält.
Gemäß Satz von Henkin (Satz 1.38) wird Θ von der reduzierten Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Theta] = \big([\mathcal{A}_\Theta], [\beta_\Theta]\big)$ erfüllt. Gemäß Definition 1.35 ist die Mächtigkeit des Universums $[A_\Theta]$ höchstens so groß, wie die Mächtigkeit der Menge $T_{\sigma'}$ aller σ'-Terme. Da σ' abzählbar ist, ist auch $T_{\sigma'}$ abzählbar. Somit ist $\mathcal{J}' := [\mathcal{I}_\Theta]$ eine abzählbare σ'-Interpretation, die ein Modell von $\Theta \supseteq \Phi$ ist. Gemäß Koinzidenzlemma ist auch jede σ-Expansion $\mathcal{J}$ von $\mathcal{J}'$ ein Modell von Φ.

□

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Löwenheim und Skolem erhalten wir:

Korollar 2.12. *Sei σ eine abzählbare Signatur.*
Dann ist die Klasse aller ***überabzählbaren*** *σ-Strukturen nicht axiomatisierbar.*

Beweis:
Da σ abzählbar ist, ist auch die Menge $\text{FO}[\sigma]$ abzählbar. Somit hat gemäß Satz von Löwenheim und Skolem jeder erfüllbare Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ein abzählbares Modell. □

Auf ähnliche Art wie Satz 2.11 kann man unter Verwendung der Techniken, die wir zum Beweis des Vollständigkeitssatzes für den Fall *beliebiger* Signaturen entwickelt haben, auch Folgendes zeigen.

Folie 125

Satz 2.13 (Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei σ eine Signatur.*
Jede erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ besitzt ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß ist wie die Mächtigkeit von $\text{FO}[\sigma]$.

Beweis: Übung!

□

Satz 2.14 (Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Dann gibt es zu ***jeder*** *Menge M ein Modell von Φ, dessen Mächtigkeit mindestens so groß wie die Mächtigkeit von M ist.*

Beweis: Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Sei M eine beliebige Menge. Für jedes $m \in M$ sei c_m ein neues Konstantensymbol, das nicht in σ vorkommt, so dass $c_m \neq c_n$ für alle $m, n \in M$ mit $m \neq n$ gilt. Sei $\sigma_M := \sigma \cup \{c_m : m \in M\}$. Wir betrachten die Formelmenge

$$\Psi \quad := \quad \Phi \ \cup \ \{ \neg\, c_m{=}c_n \ : \ m, n \in M \text{ mit } m \neq n \} \quad \subseteq \quad \text{FO}[\sigma_M].$$

Behauptung 1: Ψ ist erfüllbar.

Gemäß Behauptung 1 gibt es eine σ_M-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$. Gemäß Wahl von Ψ gilt für alle $m, n \in M$, dass $c_m^{\mathcal{A}} \neq c_n^{\mathcal{A}}$. Somit ist die Abbildung $f : M \to A$ mit $f(m) := c_m^{\mathcal{A}}$ injektiv, d.h. A ist mindestens so mächtig wie M.
Außerdem ist gemäß der Wahl von Ψ das σ-Redukt von $\mathcal{I}$ ein Modell von Φ.

Um den Beweis von Satz 2.14 abzuschließen, müssen wir nur noch Behauptung 1 beweisen. Dazu nutzen wir den Endlichkeitssatz. Um zu zeigen, dass Ψ erfüllbar ist, reicht es zu zeigen, dass jede *endliche* Teilmenge von Ψ erfüllbar ist.
Sei also $\Gamma \subseteq_e \Psi$. Da Γ endlich ist, gibt es eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und paarweise verschiedene Elemente $m_1, \ldots, m_\ell \in M$, so dass

$$\Gamma \quad \subseteq \quad \Phi' \quad := \quad \Phi \, \cup \, \{\, \neg\, c_{m_i}{=}c_{m_j} \; : \; i, j \in \{1, \ldots, \ell\} \text{ mit } i \neq j \,\}.$$

Laut Voraussetzung besitzt Φ ein *unendliches* Modell $\mathcal{J} = (\mathcal{B}, \beta)$. Da das Universum B von $\mathcal{B}$ unendlich ist, können wir darin ℓ paarweise verschiedene Elemente $b_1, \ldots, b_\ell$ finden. Sei $\mathcal{B}'$ die σ_M-Expansion von $\mathcal{B}$, bei der für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ das Konstantensymbol c_{m_i} mit dem Element b_i interpretiert wird, und bei der für jedes $m \in M \setminus \{m_1, \ldots, m_\ell\}$ das Konstantensymbol c_m mit dem Element b_1 interpretiert wird.
Gemäß Koinzidenzlemma gilt für die σ_M-Interpretation $\mathcal{J}' := (\mathcal{B}', \beta)$, dass $\mathcal{J}' \models \Phi$. Insgesamt ist also $\mathcal{J}'$ ein Modell von Φ', und daher auch ein Modell von Γ. Dies beendet den Beweis von Behauptung 1 und somit auch den Beweis von Satz 2.14.

$\square$

2.3 Elementare Äquivalenz und Nichtstandardmodelle

Folie 126

Definition 2.15. Sei σ eine Signatur.

elementar äquivalent
$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

(a) Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen **elementar äquivalent** (kurz: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), wenn sie dieselben FO[σ]-Sätze erfüllen (d.h.: Für jeden FO[σ]-Satz φ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$).

Theorie
Th($\mathcal{A}$)

(b) Die **Theorie** Th($\mathcal{A}$) einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Menge aller FO[σ]-Sätze, die $\mathcal{A}$ erfüllt. D.h.:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \; := \; \{\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] : \varphi \text{ ist ein Satz mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Klar:

- Für alle FO[σ]-Sätze φ und alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt: entweder $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ oder $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$.
- Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$.

Daraus folgt direkt:

Folie 127

Korollar 2.16. *Für jede Signatur σ und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathcal{A}$ elementar äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar (durch die Menge $\Phi := \mathrm{Th}(\mathcal{A})$).*

Bemerkung 2.17. Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

(a) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$

Die Richtung „$\Longleftarrow$“ ist offensichtlich. Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt für **endliche** σ aus Aufgabe 0.3 und für **unendliche** σ aus Aufgabe 2.3.

(b) Ist $\mathcal{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, aber $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$.

Dies folgt leicht aus dem aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem.

Details: Übung (siehe Aufgabe 2.3).

Beispiel 2.18 (Nichtstandardmodell von $\mathcal{N}_{\leqslant}$)**.**
Sei $\mathcal{N}_{\leqslant} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$. Gemäß Bemerkung 2.17(b) gibt es eine zu $\mathcal{N}_{\leqslant}$ elementar äquivalente $\{\leqslant\}$-Struktur $\mathcal{B}$, die nicht isomorph zu $\mathcal{N}_{\leqslant}$ ist. Eine solche Struktur $\mathcal{B}$ wird **Nichtstandardmodell von** $\mathcal{N}_{\leqslant}$ genannt.

Frage: Wie sieht $\mathcal{B}$ aus?

Wir wissen, dass $\mathcal{N}_{\leqslant} = (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$ eine **diskrete lineare Ordnung** ist, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt. Der Begriff “diskrete lineare Ordnung” ist dabei wie folgt definiert: Eine lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ heißt **diskret**, wenn für jedes $a \in A$ Folgendes gilt:

diskrete lineare Ordnung

- Falls es ein $b \in A$ gibt, das echt größer als a ist (d.h. $b \neq a$ und $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$), so gibt es auch ein **kleinstes** Element, das echt größer als a ist (d.h. ein a' mit $a' \neq a$ und $a \leqslant^{\mathcal{A}} a'$ und $a' \leqslant^{\mathcal{A}} b$, für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ und $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$). Dieses Element wird **Nachfolger** von a bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$ genannt.
- Falls es ein $b \in A$ gibt, das echt kleiner als a ist (d.h. $b \neq a$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} a$), so gibt es auch ein **größtes** Element, das echt kleiner als a ist (d.h., ein a' mit $a' \neq a$ und $a' \leqslant^{\mathcal{A}} a$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} a'$, für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} a$). Dieses Element wird **Vorgänger** von a bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$ genannt.

Man sieht leicht, dass es einen FO[$\leqslant$]-Satz δ gibt, so dass für alle $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt (Details: Übung.):

$$\mathcal{A} \models \delta \quad \iff \quad \mathcal{A} \text{ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.}$$

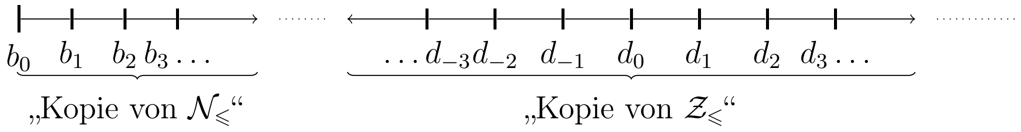
Wegen $\mathcal{N}_{\leqslant} \models \delta$ und $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}_{\leqslant}$ gilt auch $\mathcal{B} \models \delta$. Somit ist $\mathcal{B}$ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.
Sei $b_0 \in B$ das kleinste Element bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$. Da $\leqslant^{\mathcal{B}}$ diskret ist und kein größtes Element besitzt, muss es einen Nachfolger (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$) b_1 von b_0 geben, und es muss für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $b_n \in B$ geben, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: b_{n+1} ist der Nachfolger von b_n (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$).
Sei $B' := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Klar: $B' \subseteq B$, und $\mathcal{B}_{|B'} \cong \mathcal{N}_{\leqslant}$. Wegen $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{N}_{\leqslant}$ muss also gelten: $B' \subsetneqq B$, das heißt, es es gibt ein $d_0 \in B \setminus B'$.
Da $\leqslant^{\mathcal{B}}$ eine diskrete lineare Ordnung ohne größtes Element ist, gilt außerdem Folgendes:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $b_n \leqslant^{\mathcal{B}} d_0$ (und $b_n \neq d_0$).
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es ein $d_n \in B$, so dass d_{n+1} der Nachfolger von d_n bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$ ist.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es ein $d_{-n} \in B$, so dass $d_{-(n+1)}$ der Vorgänger von d_{-n} bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$ ist.
- Für alle $d \in \{d_i : i \in \mathbb{Z}\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $b_n \leqslant d$ und $b_n \neq d$.

Insgesamt gilt für $B'' := \{d_i : i \in \mathbb{Z}\}$:

$$\mathcal{B}_{|B''} \;\cong\; \mathcal{Z}_{\leqslant} := (\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}}),$$

und $\mathcal{B}_{|B' \cup B''}$ sieht folgendermaßen aus:



Außerdem muss für alle $c \in B \setminus (B' \cup B'')$ gelten:

- $b_n \leqslant c$, für alle $n \in \mathbb{N}$,
- es existiert ein $i \in \mathbb{Z}$, so dass $d_i \leqslant c \iff$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $d_i \leqslant c$.

Sei nun $\pi : B \to B$ die Abbildung mit

- $\pi_{|B \setminus B''} := \text{id}_{|B \setminus B''}$ (das heißt $\pi(c) = c$, für alle $c \in B \setminus B''$)
- $\pi(d_i) := d_{i+1}$, für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Man sieht leicht, dass π ein Isomorphismus von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}$ ist, d.h., $\pi(B) = B$ und $\pi(\leqslant^{\mathcal{B}}) = \leqslant^{\mathcal{B}}$.

Beispiel 2.19. mbox
Wir nutzen die Erkenntnisse aus Beispiel 2.18 nun, um einen Beweis der Aussage

> “Die Klasse der endlichen linearen Ordnungen gerader Kardinalität (*EVEN*$_{\leqslant}$) ist nicht FO-definierbar in der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen (ORD$_{\leqslant}$).”

anzugeben, der nicht auf Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen beruht.[1]
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, *EVEN*$_{\leqslant}$ wäre FO-definierbar in ORD$_{\leqslant}$ durch einen FO[$\leqslant$]-Satz φ. Sei x eine Variable, die nicht in φ vorkommt, und sei $\tilde{\varphi}(x)$ die Formel, die aus φ entsteht, indem jeder Quantor eingeschränkt wird auf Elemente $< x$. D.h.: Jede Teilformel der Form $\exists y\, \psi$ (bzw. $\forall y\, \psi$) wird ersetzt durch die Formel
$\exists y\, (y \leqslant x \ \wedge \neg y{=}x \ \wedge \psi)$ (bzw. $\forall y\, \big((y \leqslant x \ \wedge \ \neg y{=}x) \to \psi)\big)$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\leqslant} \models \tilde{\varphi}[n] \quad &\iff \quad \big(\{0,\dots,n-1\}, \leqslant^{\mathcal{N}}_{|\{0,\dots,n-1\}}\big) \models \varphi \\ &\iff \quad n \text{ ist gerade} \quad \text{(denn } \varphi \text{ definiert } \textit{EVEN}_{\leqslant} \text{ auf } \textsc{Ord}_{\leqslant}). \end{aligned}$$

Für den FO[$\leqslant$]-Satz

$$\psi \ := \ \forall u \forall v \ \Big(\varphi_{\text{Succ}}(u,v) \to \big(\tilde{\varphi}(u) \ \leftrightarrow \ \neg\tilde{\varphi}(v)\big)\Big),$$

---

[1] Der hier vorgestellte Beweis ist von Martin Otto [Ott11].

wobei $\varphi_{\text{Succ}}(u,v)$ ausdrückt, dass v der unmittelbare Nachfolger von u bzgl. $\leqslant$ ist, gilt dann offensichtlicherweise:

$$\mathcal{N}_{\leqslant} \models \psi.$$

Sei $\mathcal{B}$ die Struktur aus Beispiel 2.18. Wegen $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}_{\leqslant}$ gilt dann auch: $\mathcal{B} \models \psi$. Seien $d_0, d_1 \in B$ wie in Beispiel 2.18 gewählt. Wegen $\mathcal{B} \models \psi$ gilt dann insbesondere

$$\mathcal{B} \models \tilde{\varphi}[d_0] \iff \mathcal{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1].$$

Wir betrachten o.B.d.A. den Fall, dass

$$\mathcal{B} \models \tilde{\varphi}[d_0] \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1] \tag{2.1}$$

(der andere Fall kann analog behandelt werden).
Sei nun π der Isomorphismus aus Beispiel 2.18 mit $\pi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Gemäß Isomorphielemma (Korollar 0.32) folgt aus (2.1), dass $\pi(\mathcal{B}) \models \tilde{\varphi}[\pi(d_0)]$. Wegen $\pi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ und $\pi(d_0) = d_1$ (vgl. Beispiel 2.18) gilt also: $\mathcal{B} \models \tilde{\varphi}[d_1]$. Dies ist ein Widerspruch zu (2.1), da $\mathcal{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1]$. ☐

Folie 128

Zur Erinnerung (Standardmodell der Arithmetik):

- $\sigma_{\text{Ar}} = \{ \leqslant, +, \times, 0, 1 \}$, wobei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist, $+$ und $\times$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind und 0 und 1 zwei Konstantensymbole sind.
- Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur

  $$\mathcal{N} := \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\right),$$

  wobei $\leqslant^{\mathcal{N}}$, $+^{\mathcal{N}}$, $\times^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind, und $0^{\mathcal{N}}$, $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 und 1 sind.

Nichtstandardmodell der Arithmetik

Definition 2.20. Ein **Nichtstandardmodell der Arithmetik** ist eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente, aber nicht-isomorphe σ_{Ar}-Struktur.

Folie 129

Aus Bemerkung 2.17 (b) folgt direkt, dass es Nichtstandardmodelle der Arithmetik gibt. Gemäß dem folgenden Satz gibt es sogar ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

Satz 2.21 (Der Satz von Skolem)**.**
Es gibt ein abzählbares Nichstandardmodell der Arithmetik.

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n}$ der folgendermaßen induktiv definierte σ_{Ar}-Term:

$$\underline{0} \ := \ 0, \quad \text{und für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ sei} \quad \underline{n{+}1} \ := \ \underline{n} + 1.$$

In $\mathcal{N}$ wertet sich der Term $\underline{n}$ zur Zahl n aus, d.h. es gilt $\underline{n}^{\mathcal{N}} = n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\Phi \quad := \quad \text{Th}(\mathcal{N}) \ \cup \ \{ \, \neg\, x{=}\underline{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \, \}.$$

Dann ist jede **endliche** Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi$ erfüllbar — z.B. durch die Interpretation $(\mathcal{N}, \beta)$ mit $\beta(x) := m{+}1$, wobei $m := \max\{n \in \mathbb{N} : \neg\, x{=}\underline{n} \ \in \Gamma\}$. Gemäß Endlichkeitssatz ist daher auch Φ erfüllbar. Gemäß Satz von Löwenheim und Skolem besitzt Φ ein abzählbares Modell (beachte dazu: Φ ist abzählbar, da es nur abzählbar viele FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln gibt).
Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{B}, \beta)$ ein abzählbares Modell von Φ. Dann ist $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}$, denn für jeden FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz φ gilt:

- Falls $\mathcal{N} \models \varphi$, so $\varphi \in \text{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathcal{B} \models \varphi$.
- Falls $\mathcal{N} \not\models \varphi$, so $\mathcal{N} \models \neg\varphi$, also $\neg\varphi \in \text{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathcal{B} \models \neg\varphi$ und somit $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Im Folgenden zeigen wir noch, dass $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{N}$. Angenommen, $\mathcal{B} \cong \mathcal{N}$. Dann gibt es einen Isomorphismus π von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{B}$. Gemäß Isomorphielemma (siehe Behauptung 1 im Beweis von Satz 0.32) gilt für jeden der σ_{Ar}-Terme $\underline{n}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$), dass

$$\pi\big(\underline{n}^{\mathcal{N}}\big) = \underline{n}^{\mathcal{B}}.$$

Wegen $\underline{n}^{\mathcal{N}} = n$ gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\pi(n) = \underline{n}^{\mathcal{B}}.$$

Da π ein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{B}$ ist, gilt

$$B \ = \ \{\pi(n) : n \in \mathbb{N}\} \ = \ \{\underline{n}^{\mathcal{B}} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Somit gilt für die Belegung β und die Variable x, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\beta(x) = \underline{n}^{\mathcal{B}}$. Somit gilt: $\mathcal{I} = (\mathcal{B}, \beta) \ \models \ x{=}\underline{n}$. Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage, dass $\mathcal{I}$ ein Modell von Φ ist, da Φ die Formel $\neg\, x{=}\underline{n}$ enthält. ☐

Frage: Wie sieht ein Nichtstandardmodell der Arithmetik aus?

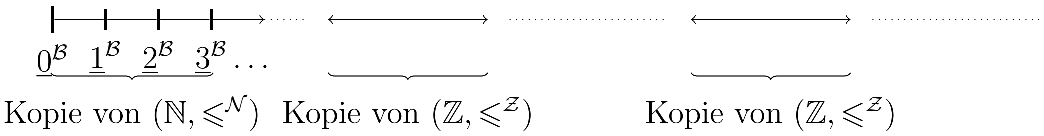
Antwort: Sei $\mathcal{B}$ ein Nichtstandardmodell der Arithmetik, d.h.: $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}$ und $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{N}$. Dann gilt:

- $\leqslant^{\mathcal{B}}$ ist eine diskrete lineare Ordnung auf B, die ein kleinstes aber kein größtes Element besitzt,
- $0^{\mathcal{B}}$ ist das kleinste Element dieser linearen Ordnung,

(denn: jede dieser Aussagen lässt sich durch einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz beschreiben, der von $\mathcal{N}$ erfüllt wird). Außerdem erfüllt $\mathcal{B}$ die folgenden Sätze aus $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\underline{n}$ dabei der im Beweis von Satz 2.21 definierte σ_{Ar}-Term):

- $\forall x \; \underline{0} \leqslant x$,
- $\forall x \; (\underline{0} = x \;\vee\; \underline{1} \leqslant x)$,
- $\forall x \; (\underline{0} = x \;\vee\; \underline{1} = x \;\vee\; \underline{2} \leqslant x)$,
- $\forall x \; (\underline{0} = x \;\vee\; \underline{1} = x \;\vee\; \underline{2} = x \;\vee\; \underline{3} \leqslant x)$,
- usw.

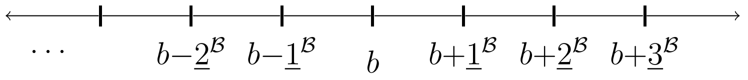
Die Ordnung $\leqslant^{\mathcal{B}}$ besteht damit aus einer Kopie von $(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, gefolgt von Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.



Außerdem erfüllt $\mathcal{B}$ für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ die beiden folgenden $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätze, die zu $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ gehören:

- $\underline{m} + \underline{n} \;=\; \underline{m{+}n}$,
- $\underline{m} \times \underline{n} \;=\; \underline{m \cdot n}$.

Daraus folgt, dass $\mathcal{N}$ isormorph ist zu der Einschränkung von $\mathcal{B}$ auf die Menge $\{\underline{n}^{\mathcal{B}} : n \in \mathbb{N}\}$. Außerdem gilt: Ist $b \in B$ ein Element, das in einer der Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ liegt, so sieht diese Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ folgendermaßen aus:



Daher gilt: das Element $(b +^{\mathcal{B}} b)$ muss in einer **anderen** Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ liegen. Analog folgt: für jedes $b^{(i)} := \underbrace{b +^{\mathcal{B}} \ldots +^{\mathcal{B}} b}_{i\text{-mal, für } i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ muss es eine neue Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ geben.

Man kann auch zeigen, dass zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathcal{B}$ eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ liegen muss.

2.4 Literaturhinweise

Zur weiterführenden Lektüre werden das Kapitel 6 in [EFT98], sowie der Artikel [Ott11] von Martin Otto empfohlen.

2.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1

Geben Sie eine Signatur σ und eine Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ an, so das Φ erfüllbar ist, aber kein abzählbares Modell hat.

Aufgabe 2.2(a) Beweisen Sie den absteigenden Satz von Löwenheim und Skolem (Satz 2.13).

(b) Gilt auch die verschärfte Variante des absteigenden Satzes von Löwenheim und Skolem, die besagt, dass die Mächtigkeit des Modells höchstens so groß wie die Mächtigkeit von Φ ist?

Aufgabe 2.3

Beweisen Sie Bemerkung 2.17, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Dann gilt:

(a) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$: $\quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(b) Ist $\mathcal{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \ncong \mathcal{A}$.

Hinweis: Für (b) können Sie den aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem benutzen. Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Nutzen Sie Aufgabe 0.3, um zu zeigen, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, so ist $|B| = |A|$.

Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.
Alternativ können Sie mittels $|B| = |A| < \infty$ direkt zeigen, dass (a) für beliebige Signaturen gilt, indem Sie überlegen, wie viele Bijektionen zwischen A und B existieren.

Aufgabe 2.4
Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist axiomatisierbar.

(b) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist nicht endlich axiomatisierbar.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Zur Erinnerung: Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls er keinen Kreis endlicher Länge besitzt.

Aufgabe 2.5
Seien A und B zwei Mengen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Für jede Menge A gibt es eine Menge B mit $A \prec B$ (d.h. es gibt eine injektive Funktion von A nach B, aber keine bijektive).

(b) Für alle Mengen A und B mit $A \preccurlyeq B$ und $B \preccurlyeq A$ ist $A \sim B$. Das heißt, falls es Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ gibt, die jeweils injektiv sind, dann gibt es eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.

Aufgabe 2.6
Geben Sie einen FO[$\leqslant$]-Satz δ an, so dass für alle $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \delta \quad \iff \quad \text{$\mathcal{A}$ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.}$$

Aufgabe 2.7
Sei $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, und sei $\mathcal{B}$ die $\{\leqslant\}$-Struktur mit Universum

$$B \;:=\; \big(\{0\} \times \mathbb{N}\big) \cup \big(\{1\} \times \mathbb{Z}\big)$$

und Relation

$$\leqslant^{\mathcal{B}} \;:=\; \big\{\big((i,j),(i',j')\big) \in B \times B \;:\; i < i' \text{ oder } \big(i = i' \text{ und } j \leqslant j'\big)\big\}.$$

Sind die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist. *Hinweis:* Sie können Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele benutzen.

Aufgabe 2.8

Sei $\mathcal{B}$ ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik.

Zeigen Sie: Zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$ in $\mathcal{B}$ liegt eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$.

Kapitel 3

Die Grenzen der Berechenbarkeit

3.1 Entscheidbarkeit und rekursive Aufzählbarkeit

Folie 130

Zur Erinnerung:

Definition 3.0. Sei M eine abzählbare Menge.

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und ausgibt

entscheidbar

- „JA“, falls $m \in L$
- „NEIN“, falls $m \notin L$

(b) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **semi-entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$

semi-entscheidbar

- nach endlich vielen Schritten anhält und dann „JA“ ausgibt, falls $m \in L$ ist
- nie anhält, falls $m \notin L$ ist

(c) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **rekursiv aufzählbar** (engl.: **recursively enumerable**, kurz **r.e.**), falls es einen Algorithmus gibt, der nach und nach sämtliche Elemente in L ausgibt.

rekursiv aufzählbar
r.e.

(d) Sei M' eine Menge.
Eine Funktion $f : M \to M'$ heißt **berechenbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und den Wert $f(m)$ ausgibt.

berechenbar

Folie 131

Bemerkung: Ist $M = A^*$, wobei A ein endliche Alphabet ist, so kann man leicht sehen, dass folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ ist semi-entscheidbar genau dann, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

(b) Jede entscheidbabre Menge $L \subseteq M$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Sind $L_1 \subseteq M$ und $L_2 \subseteq M$ zwei rekursiv aufzählbare Mengen, so ist auch die Menge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

3.1.1 Vereinbarung zur Kodierung der Syntax von FO$[\sigma]$*-Formeln*

Folie 132

- In diesem Kapitel sei σ eine **abzählbare, entscheidbare** Signatur. Die Sybole aus σ sind kodiert als Wörter über einem endlichen Alphabet, etwa dem `ASCII`-Alphabet.
- Wir kodieren σ-Terme und FO$[\sigma]$-Formeln als Wörter über einem endlichen Alphabet.
- Wir erweitern die Kodierung auf endliche Mengen von σ-Termen und FO$[\sigma]$-Formeln.
- Wir kodieren Ableitungen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ (vgl. Kapitel 1) als Wörter über einem endlichen Alphabet.

Folie 133

Sei $\mathcal{A}$ das endliche Alphabet, das wir für die Kodierung von Symbolen (aus σ), Termen, Formeln, endlichen Mengen von Termen und Formeln sowie Beweisen (in $\mathfrak{K}_S$) verwenden.
Seien $\mathrm{Y}, \mathrm{V}, \mathrm{T}, \mathrm{L}, \mathrm{S}, \mathrm{G}, \mathrm{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ die Mengen der kodierten

- Symbole aus σ (Y)
- Variablen (V)
- Terme (T)

- FO[σ]-Formeln (L)
- FO[σ]-Sätze (S)
- endlichen Formelmengen (G)
- Beweise (d.h. Ableitungen in $\mathfrak{K}_S$) (B)

Folie 134

Annahme 3.1. Unsere Kodierung hat die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen $\mathrm{Y}, \mathrm{V}, \mathrm{T}, \mathrm{L}, \mathrm{S}, \mathrm{G}, \mathrm{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ sind entscheidbar.

(b) Die logischen Operatoren

- Negation
- Disjunktion
- Konjunktion
- existentielle Quantifizierung
- universelle Quantifizierung,

aufgefasst als 1- bzw. 2-stellige partielle Funktionen auf $\mathcal{A}^*$, sind berechenbar.

(c) Die beiden Funktionen, die jeder FO[σ]-Formel die (endliche) Menge ihrer Variablen bzw. die (endliche) Menge ihrer Subformeln zuordnen, sind berechenbar.

(d) Die Substitution einer Variablen durch einen Term in einer Formel, aufgefasst als 3-stellige partielle Funktion auf $\mathcal{A}^*$, ist berechenbar.

Folie 135

(e) Die 2-stellige Relation

$$\Big\{(f,g) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* : f \in \mathrm{L} \text{ ist die Kodierung einer Formel } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \\ g \in \mathrm{G} \text{ ist die Kodierung einer endlichen Menge } \Gamma \\ \text{von FO}[\sigma]\text{-Formeln mit } \varphi \in \Gamma\Big\}$$

ist entscheidbar.

(f) Die 3-stellige Relation

$$\Big\{(b,g,f) \in (\mathcal{A}^*)^3 : g \in \text{G ist die Kodierung einer endlichen Menge } \Gamma \text{ von FO}[\sigma]\text{-Formeln, } f \in \text{L ist die Kodierung einer FO}[\sigma]\text{-Formel } \varphi,\ b \in \text{B ist die Kodierung einer Ableitung } \Gamma \vdash \varphi \text{ im Sequenzenkalkül}\Big\}$$

ist entscheidbar.

Folie 136

Bemerkung: In Abschnitt 3.2 werden wir eine Kodierung angeben, die die in Annahme 3.1 aufgelisteten Eigenschaften hat.

Vereinbarung: Für den Rest dieses Kapitels unterscheiden wir nicht mehr zwischen syntaktischen Objekten (wie FO[σ]-Formeln) und ihren Kodierungen. Zum Beispiel sprechen wir direkt von **entscheidbaren Formelmengen** (und meinen dabei eigentlich entscheidbare Mengen von Kodierungen von Formeln).

Folie 137

Lemma 3.2 (Aufzählbarkeit der beweisbaren Sätze)**.**
Sei σ eine abzählbare, entscheidbare Signatur. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine rekursiv aufzählbare Formelmenge. Dann ist auch die Menge

$$\{\varphi \in \text{FO}[\sigma] \, : \, \Phi \models \varphi\}$$

rekursiv aufzählbar.

Beweis:
Gemäß Vollständigkeitssatz gilt

$$\{\varphi \in \text{FO}[\sigma] \, : \, \Phi \models \varphi\} \ = \ \{\varphi \in \text{FO}[\sigma] \, : \, \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi\}$$

Daher zählt der folgende Algorithmus nach und nach sämtliche Elemente aus $\{\varphi \in \text{FO}[\sigma] \, : \, \Phi \models \varphi\}$ auf:

```
1) Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ tue folgendes:
2)        Zähle die ersten $n$ Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aus $\Phi$ auf (mit dem
          Algorithmus, den es laut Voraussetzung gibt).
```

3) Zähle die ersten n Kodierungen von Beweisen in $\mathfrak{K}_S$, etwa $b_1, \dots, b_n$ auf (mit dem Algorithmus, den es laut Annahme 3.1 gibt).

4) Prüfe für jedes b_i, ob es eine Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ mit $\Gamma \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ beweist. Wenn ja, gib φ aus.

□

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 3.2 erhalten wir:

Korollar 3.3. *Sei σ eine abzählbare, entscheidbare Signatur. Dann gilt: Die Menge aller allgemeingültigen* FO[σ]*-Formeln ist rekursiv aufzählbar.*

Bemerkung: Dies ist die Formalisierung der auf Seite 39 angekündigten Aussage (Die Semi-Entscheidbarkeit des Allgemeingültigkeitsproblems für Formeln erster Stufe).

3.2 Gödelisierung von FO[σ_{Ar}]

Folie 138

Notation 3.4 (Arithmetik)**.**

- Wir betrachten nun die Signatur $\sigma_{\mathrm{Ar}} \;=\; \{\leqslant,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$.
- $\mathcal{N}$ bezeichnet wie üblich das Standardmodell $(\mathbb{N},\ \leqslant^{\mathcal{N}},\ +^{\mathcal{N}},\ \cdot^{\mathcal{N}},\ 0^{\mathcal{N}},\ 1^{\mathcal{N}})$ der Arithmetik.
- Für Terme $t, u \in T_{\sigma_{\mathrm{Ar}}}$ schreiben wir $t < u$ als Abkürzung für die FO[σ_{Ar}]-Formel $(t \leqslant u \ \wedge\ \neg t = u)$.

Definition 3.5 (Zahlterme)**.**
Die Zahlterme $\underline{n}$, für $n \in \mathbb{N}$, seien die folgendermaßen definierten σ_{Ar}-Terme

$$\underline{0} := 0 \;\text{ und f.a. } n \in \mathbb{N} \text{ sei } \underline{n+1} := (\underline{n} + 1);\; \text{präzise } \underline{n+1} := +(\underline{n}, 1)$$

Beispiel:

$$\underline{0} = 0 \qquad \underline{1} \mathrel{\widehat{=}} (\underline{0} + 1) \mathrel{\widehat{=}} +(0,1) \qquad \underline{2} \mathrel{\widehat{=}} (\underline{1} + 1) \mathrel{\widehat{=}} +(\underline{1}, 1) = +(+(0,1),1)$$

3.2.1 Arithmetisierung

Folie 139

- Wir kodieren syntaktische Objekte wie Symbole aus σ_{Ar}, Formeln aus $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ usw. durch natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die wir als Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\text{Hex}} := \{0,\ldots,9,a,\ldots,f\}$ auffassen.
  Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $[n]_{\text{Hex}}$, um ihre Hexadezimaldarstellung zu bezeichnen. Für ein $w \in \mathcal{A}_{\text{Hex}}^*$ schreiben wir $[w]_{\mathbb{N}}$, um die natürliche Zahl zu bezeichnen, die durch w in Hexadezimaldarstellung repräsentiert wird.
- Unser Ziel ist eine Kodierung, die alle Eigenschaften aus Annahme 3.1 besitzt.
- Weil für $w \in \mathcal{A}_{\text{Hex}}^*$ die Wörter w und $0w$ dieselbe Zahl darstellen, vermeiden wir Kodewörter, die mit 0 beginnen.
- Die Kodierung eines Objekts o werden wir stets mit $\langle o \rangle$ bezeichnen.

Zur Erinnerung:
σ_{Ar}-Terme und $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln sind Wörter über dem Alphabet

$$A_{\sigma_{\text{Ar}}} \;=\; \mathsf{VAR} \cup \big\{\neg,\wedge,\vee,\exists,\forall,(,),=\big\} \cup \big\{\leqslant,+,\cdot,0,1\big\} \cup \{,\}$$

Folie 140

Definition 3.6 (Kodierung von $A_{\sigma_{\text{Ar}}}$)**.**
Wir kodieren die Elemente des Alphabets $A_{\sigma_{\text{Ar}}}$ durch Worte über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\text{Hex}}$ wie folgt:

- <u>Variablen</u>: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\langle v_n \rangle \;:=\; 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ mal}} \;=\; [16^n]_{\text{Hex}}$$

- <u>Logische Symbole</u>:
  - $\langle \neg \rangle \;:=\; 2 \;=\; [2]_{\text{Hex}}$
  - $\langle \wedge \rangle \;:=\; 3 \;=\; [3]_{\text{Hex}}$
  - $\langle \vee \rangle \;:=\; 4 \;=\; [4]_{\text{Hex}}$
  - $\langle \exists \rangle \;:=\; 5 \;=\; [5]_{\text{Hex}}$

- $\langle\forall\rangle \;:=\; 6 \;=\; [6]_{\text{Hex}}$
- $\langle\,(\,\rangle \;:=\; 7 \;=\; [7]_{\text{Hex}}$
- $\langle\,)\,\rangle \;:=\; 8 \;=\; [8]_{\text{Hex}}$
- $\langle=\rangle \;:=\; 9 \;=\; [9]_{\text{Hex}}$
- $\langle,\rangle \;:=\; f \;=\; [15]_{\text{Hex}}$

Folie 141

- Arithmetische Symbole:
  - $\langle\leqslant\rangle \;:=\; a \;=\; [10]_{\text{Hex}}$
  - $\langle+\rangle \;:=\; b \;=\; [11]_{\text{Hex}}$
  - $\langle\cdot\rangle \;:=\; c \;=\; [12]_{\text{Hex}}$
  - $\langle 0\rangle \;:=\; d \;=\; [13]_{\text{Hex}}$
  - $\langle 1\rangle \;:=\; e \;=\; [14]_{\text{Hex}}$

Folie 142

Definition 3.7 (Kodierung von Termen, Formeln und Beweisen)**.**

(a) Für jedes Wort $w = w_1 \cdots w_\ell \in A^*_{\sigma_{\text{Ar}}}$ ist $\langle w\rangle = \langle w_1\rangle\langle w_2\rangle\cdots\langle w_\ell\rangle$. Insbesondere gilt:

- Für jeden Term $t \in T_{\sigma_{\text{Ar}}}$, etwa $t = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\text{Ar}}}$ ist $\langle t\rangle = \langle s_1\rangle\langle s_2\rangle\cdots\langle s_\ell\rangle$.
- Für jede Formel $\varphi \in \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$, etwa $\varphi = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\text{Ar}}}$ ist $\langle\varphi\rangle = \langle s_1\rangle\langle s_2\rangle\cdots\langle s_\ell\rangle$.

(b) Für eine endliche nicht-leere Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ sei

$$\langle\Phi\rangle \;:=\; \langle\varphi_1\rangle ff \langle\varphi_2\rangle ff \cdots ff \langle\varphi_\ell\rangle$$

falls $\Phi = \{\varphi_1, \ldots \varphi_\ell\}$ mit $[\langle\varphi_1\rangle]_{\mathbb{N}} \leqslant \ldots \leqslant [\langle\varphi_\ell\rangle]_{\mathbb{N}}$, wobei $\leqslant$ hier die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Beachte: $ff \in \mathcal{A}^2_{\text{Hex}}$ wird hier als „Trennsymbol“ verwendet.

Ferner sei $\langle\emptyset\rangle \;:=\; 0 \;=\; [0]_{\text{Hex}}$.

Folie 143

(c) Für eine Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ sei

$$\langle \Gamma \vdash \varphi \rangle \;:=\; fff\langle \Gamma \rangle fff\langle \varphi \rangle fff.$$

(d) Für eine Folge $(S_1, \ldots, S_\ell)$ von Sequenzen (also insbesondere auch für eine Ableitung im Sequenzenkalkül) sei

$$\langle (S_1, \ldots, S_\ell) \rangle \;:=\; \langle S_1 \rangle \cdots \langle S_\ell \rangle.$$

Folie 144

Lemma 3.8.
Die in Definition 3.6 und 3.7 eingeführte Kodierung besitzt alle Eigenschaften aus Annahme 3.1.
Ferner gilt für alle syntaktischen Objekte o (d.h. für Terme, Formeln, Formelmengen, Sequenzen, Beweise), dass entweder $\langle o \rangle = 0$ ist oder $\langle o \rangle$ mit einem Zeichen in $\{1, \ldots, 9, a, \ldots, f\}$ beginnt. Daher lässt sich jedes Kodewort $\langle o \rangle$ als Hexadezimaldarstellung der natürlichen Zahl $[\langle o \rangle]_{\mathbb{N}}$ auffassen.

Beweis: Übung.

$\square$

Folie 145

Bemerkung 3.9 (Gödelisierung)**.**
Die Kodierung von Formeln durch natürliche Zahlen bezeichnet man auch als **Gödelisierung**.

Gödelisierung

Für eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$ bezeichnet man die Zahl $n_\varphi := [\langle \varphi \rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ als die **Gödelnummer von** φ.

Gödelnummer von φ

Analog bezeichnen wir für einen Term $t \in A_{\sigma_{\mathrm{Ar}}}$ die Zahl $n_t := [\langle t \rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ als die Gödelnummer von t.

Lemma 3.10.
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) := [\langle \underline{n} \rangle]_{\mathbb{N}}$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$) ist berechenbar.
D.h.: Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Gödelnummer des Terms $\underline{n}$ ausgibt.

Beweis:
Gemäß Definition 3.7 gilt: $\underline{0} = 0 \in \sigma_{\text{Ar}}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$\underline{n+1} = (\underline{n} + 1)$ bzw. präzise: $\underline{n+1} = +(\underline{n}, 1)$.
Man sieht leicht, dass f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\underline{n} \;=\; \underbrace{+(+(\cdots+(}_{n \text{ mal } „+(“}\,0\,\underbrace{,1),1),\cdots,1)}_{n \text{ mal } „\,,1)\,“}$$

Gemäß Definition 3.6 gilt:

$$\langle + \rangle = b \quad \langle\, (\, \rangle = 7 \quad \langle 0 \rangle = d \quad \langle , \rangle = f \quad \langle 1 \rangle = e \quad \langle\,)\, \rangle = 8.$$

Somit ist für $n \geqslant 1$

$$\langle \underline{n} \rangle \;=\; \underbrace{b7b7\ldots b7}_{n \text{ mal„}b7“}\, d\, \underbrace{fe8fe8\ldots fe8}_{n \text{ mal„}fe8“}$$

Dies ist die Hexadezimaldarstellung der Zahl $[\langle \underline{n} \rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$. Man kann leicht einen Algorithmus angeben, der bei Eingabe einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ zunächst den Term $\underline{n}$, dann das Kodewort $\langle \underline{n} \rangle$ und daraus die Zahl $[\langle \underline{n} \rangle]_{\mathbb{N}}$ berechnet.

□

Folie 146

Lemma 3.11 (Definierbare Zahlenmengen).
Sei Φ eine entscheidbare Menge von FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Sätzen, und sei $\varphi(x)$ eine* FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Formel. Dann gilt:*

(a) Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; \Phi \models \varphi(\underline{n})\}$ ist rekursiv aufzählbar.

(b) Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; \Phi \models \neg\varphi(\underline{n})\}$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Phi \models \varphi(\underline{n})$ oder $\Phi \models \neg\varphi(\underline{n})$, so ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; \Phi \models \varphi(\underline{n})\}$ entscheidbar.

Beweis:

(a) Wegen Lemma 3.8 erfüllt unsere Kodierung die Annahme 3.1.
Wegen Lemma 3.11 und Annahme 3.1 (c) ist daher die Funktion

$$n \;\mapsto\; \langle \varphi(\underline{n}) \rangle \qquad (\text{f.a. } n \in \mathbb{N}) \tag{$*$}$$

berechenbar, d.h. es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Zahl n die Kodierung der Formel $\varphi\frac{\underline{n}}{x}$ $(= \varphi(\underline{n}))$ ausgibt.
Daher ist die Menge $\big\{\langle\varphi(\underline{n})\rangle \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}$ rekursiv aufzählbar.
Laut Voraussetzung ist Φ entscheidbar. Aus Lemma 3.2 folgt, dass $\big\{\varphi \in \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}] \,:\, \Phi \models \varphi\big\}$ rekursiv aufzählbar ist. Daher ist auch die Menge $\big\{\langle\psi\rangle \in S_{\sigma_{\text{Ar}}} \,:\, \Phi \models \psi\big\}$ rekursiv aufzählbar. Somit sind die beiden Mengen $\big\{\langle\varphi(\underline{n})\rangle \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}$ und $\big\{\langle\psi\rangle \in S_{\sigma_{\text{Ar}}} \,:\, \Phi \models \psi\big\}$ rekursiv aufzählbar. Da der Durchschnitt zweier rekursiv aufzählbarer Mengen rekursiv aufzählbar ist, ist auch die Menge

$$\big\{\langle\varphi(\underline{n})\rangle \,:\, n \in \mathbb{N},\, \Phi \models \varphi(\underline{n})\big\}$$

rekursiv aufzählbar.

Wegen $(*)$ ist daher auch die Menge $\big\{n \in \mathbb{N} \,:\, \Phi \models \varphi(\underline{n})\big\}$ rekursiv aufzählbar.

(b) folgt aus (a) mit $\neg\varphi$ an Stelle von φ.

(c) folgt direkt aus (a) und (b) und der Voraussetzung in (c) (Details: Übung).

□

3.3 FO-Definierbarkeit der berechenbaren Funktionen

3.3.1 Δ_0-Formeln und das Lemma über die β-Funktion

Folie 147

Definition 3.12 (Arithmetische Relationen)**.**
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ eine Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln und sei $k \in \mathbb{N}$.

Φ-definierbar

(a) Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt **Φ-definierbar**, wenn es eine Formel $\varphi_R(x_1, \ldots, x_k) \in \Phi$ mit $R = \varphi_R(\mathcal{N})$ gibt.

Zur Erinnerung:

$$\varphi_R(\mathcal{N}) = \big\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \,:\, \mathcal{N} \models \varphi_R[n_1, \ldots, n_k]\big\}$$

(b) Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ heißt **Φ-definierbar**, wenn ihr Graph

$$\big\{(n_1, \ldots, n_k, m) \in \mathbb{N}^{k+1} \,:\, f(n_1, \ldots, n_k) = m\big\}$$

eine Φ-definierbare Relation ist.

Folie 148

Notation 3.13 (Beschränkte Quantoren).
Für $x \in \mathsf{VAR}$, $t \in T_{\sigma_{\text{Ar}}}$ und $\varphi \in \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ schreiben wir

- $\exists x \leqslant t\, \varphi$ an Stelle von $\exists x\, (x \leqslant t \wedge \varphi)$
- $\forall x \leqslant t\, \varphi$ an Stelle von $\forall x\, (x \leqslant t \rightarrow \varphi)$.

Wir bezeichnen $\exists x \leqslant t$ und $\forall x \leqslant t$ als **beschränkte Quantoren**.
Wir schreiben auch

beschränkte Quantoren

- $\exists x < t\, \varphi$ als Abkürzung für $\exists x \leqslant t(\neg x = t \wedge \varphi)$
- $\forall x < t\, \varphi$ als Abkürzung für $\forall x \leqslant t(\neg x = t \rightarrow \varphi)$.

Folie 149

Definition 3.14 (Δ_0: Klasse aller beschränkten FO[σ_{Ar}]-Formeln).
Die Klasse Δ_0 aller **beschränkten** FO[σ_{Ar}]-Formeln ist rekursiv wie folgt definiert:

- Für jede **atomare** FO[σ_{Ar}]-Formel φ gilt: $\varphi \in \Delta_0$.
- Sind $\varphi \in \Delta_0$ und $\psi \in \Delta_0$, so gilt auch $\neg\varphi \in \Delta_0$, $(\varphi \wedge \psi) \in \Delta_0$, $(\varphi \vee \psi) \in \Delta_0$.
- Sind $\varphi \in \Delta_0$, $x \in \mathsf{VAR}$ und $t \in T_{\sigma_{\text{Ar}}}$, so dass x nicht in t vorkommt, so gilt: $\exists x \leqslant t\, \varphi \in \Delta_0$ und $\forall x \leqslant t\, \varphi \in \Delta_0$.

Das folgende Lemma liefert einen wichtigen Schlüssel zur Kodierung von Berechnungen durch Formeln der Logik erster Stufe. Das Lemma besagt, dass man Folgen natürlicher Zahlen durch einzelne Zahlen kodieren kann - und zwar so, dass diese Kodierung durch eine beschränkte FO[σ_{Ar}]-Formeln definiert werden kann.

Folie 150

Lemma 3.15 (Das Lemma über die β-Funktion).
Es gibt eine Δ_0-definierbare Funktion

$$\beta : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit der folgenden Eigenschaft:
Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jede Folge $(n_0, \ldots, n_{\ell-1}) \in \mathbb{N}^\ell$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geqslant \max\{\ell, n_0, \ldots, n_{\ell-1})\}$, so dass f.a. $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$ gilt:

$$\beta(s, i) = n_i.$$

(D.h.: s repräsentiert die Folge $(n_0, \ldots, n_{\ell-1})$ und $\beta(s, i)$ liefert die Komponente n_i)

Notation: Im Folgenden bezeichnet β immer die Funktion aus Lemma 3.15; und für $s, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist $B(s,\ell) := (\beta(s,0), \ldots, \beta(s,\ell-1))$.

Beweis:
Sei $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $(n_0, \ldots, n_{\ell-1}) \in \mathbb{N}^\ell$. Sei p die kleinste Primzahl mit $p > \max\{\ell, n_0, \ldots, n_{\ell-1}\}$. Sei t die natürliche Zahl, deren Darstellung zur Basis p wie folgt aussieht:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
n_{\ell-1} & \ell & n_{\ell-2} & (\ell-1) & \ldots & n_i & (i+1) & \ldots & n_2 & 3 & n_1 & 2 & n_0 & 1 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
p^{2\ell-1} & p^{2\ell-2} & p^{2\ell-3} & p^{2(\ell-2)} & & p^{2i+1} & p^{2i} & & p^5 & p^4 & p^3 & p^2 & p^1 & p^0
\end{array}$$

D.h.

$$\begin{aligned}
t \;:=\;\; & 1 \cdot p^0 \;+\; n_0 \cdot p^1 \\
& + 2 \cdot p^2 \;+\; n_1 \cdot p^3 \\
& + 3 \cdot p^4 \;+\; n_2 \cdot p^5 \\
& + \ldots \\
& + (i+1) \cdot p^{2i} \;+\; n_i \cdot p^{2i+1} \\
& + \ldots \\
& + \ell \cdot p^{2(\ell-1)} \;+\; n_{\ell-1} \cdot p^{2(\ell-1)+1} \\
& .
\end{aligned}$$

Behauptung 1.
Für alle $i \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
n = n_i \iff & \text{Es gibt natürliche Zahlen } m_0, m_1, m_2 \leqslant t \text{ s.d.} \\
& (1)\ t \;=\; m_0 + m_1 \cdot \big((i+1) + np + m_2 \cdot p^2\big)\,, \\
& (2)\ n < p, \\
& (3)\ m_0 < m_1 \text{ und} \\
& (4) \text{ es gibt ein } j \leqslant m_1 \text{ so dass } m_1 = p^{2j}
\end{aligned}$$

Beweis von Behauptung 1:
„$\Longrightarrow$“ :
Wir wählen

$$\begin{aligned}
m_0 \;&:=\; 1 \cdot p^0 + n_0 \cdot p^1 + \cdots + i \cdot p^{2(i-1)} + n_{i-1} \cdot p^{2i-1} \quad (< p^{2i}) \\
m_1 \;&:=\; p^{2i} \\
m_2 \;&:=\; (i+2) \cdot p^{2(i+1)-2i-2} + n_{i+1} \cdot p^{2i+3-2i-2} + \ldots \\
&\qquad + \ell \cdot p^{2(\ell-1)-2i-2} + n_{\ell-1} \cdot p^{2\ell-1-2i-2}
\end{aligned}$$

Klar: Damit sind (1), (3), (4) erfüllt. (2) gilt, da $n_i < p$.

„$\Longleftarrow$“ :
Wähle m_0, m_1, m_2 so, dass (1)-(4) erfüllt sind und sei $j \in \mathbb{N}$ mit $m_1 = p^{2j}$. Dann gilt gemäß (1): $t = m_0 + (i+1) \cdot p^{2j} + n \cdot p^{2j+1} + m_2 \cdot p^{2j+2}$. Gemäß (3) gilt: $m_0 < p^{2j}$. Gemäß Wahl von p gilt $(i+1) < p$. Wegen (2) gilt $n < p$. Die Eindeutigkeit der p-adischen Darstellung liefert $2j = 2i$, d.h. $j = i$ und $n = n_i$.

$\square_{\text{Behauptung 1}}$

Im Folgenden nutzen wir Behauptung 1, um eine Δ_0-Formel $\varphi(u, v, w, y)$ zu definieren, so dass für alle $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n = n_i \iff \mathcal{N} \models \varphi[p, t, i, n]$$

In der folgenden Formel $\varphi(u, v, w, y)$ spielt die Variable

- u die Rolle der Primzahl p,
- v die Rolle der Zahl t,
- w die Rolle der Zahl i,
- y die Rolle der Zahl n,
- v_0, v_1, v_2 die Rolle der Zahlen m_0, m_1, m_2 in den Bedingungen (1)-(4) aus Behauptung 1.

Sei $\varphi(u, v, w, y)$ nun die folgende Δ_0-Formel:

$$\begin{aligned}
&\varphi(u, v, w, y) \ := \\
&\quad \exists v_0 \leqslant v \ \exists v_1 \leqslant v \ \exists v_2 \leqslant v \Big(\\
&\qquad v = v_0 + v_1 \cdot \big((w+1) + y \cdot u + v_2 \cdot u \cdot u\big) \ \land && (1)\\
&\qquad y < u \ \land && (2)\\
&\qquad v_0 < v_1 \ \land && (3)\\
&\qquad \underbrace{\exists z \leqslant v_1 \, z \cdot z = v_1}_{v_1 \text{ ist Quadratzahl}} \ \land \ \underbrace{\forall z \leqslant v_1 \big(\overbrace{\exists z' \leqslant v_1 \, z \cdot z' = v_1}^{z \text{ ist Teiler von } v_1} \ \rightarrow \ \underbrace{\exists z' \leqslant z \, u \cdot z' = z}_{u \text{ ist Teiler von } z} \big)}_{v_1 \text{ ist Potenz von } u} \Big) && (4)
\end{aligned}$$

Behauptung 2.
$\varphi(u,v,w,y)$ ist eine Δ_0-Formel, so dass für alle $i \in \{0,\dots,\ell-1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n = n_i \iff \mathcal{N} \models \varphi[p,t,i,n]$.

Beweis von Behauptung 2:
Folgt direkt aus Behauptung 1 und der Wahl von φ.

$\square_{\text{Behauptung 2}}$

Sei nun $\psi(u,v,w,y)$ die folgende Δ_0-Formel:

$$\begin{aligned}\psi(u,v,w,y) \ := \ \Big(& \big(\varphi(u,v,w,y) \ \wedge \ y \leqslant v \ \wedge \ \neg\exists z < y \, \varphi(u,v,w,z)\big) \\ & \vee \ \big(y = 0 \ \wedge \ \neg\exists z \leqslant v \, \varphi(u,v,w,z)\big)\Big)\end{aligned}$$

Behauptung 3.
$\psi(u,v,w,y)$ ist eine Δ_0-Formel, die eine totale Funktion $\beta' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert (im Sinne von Definition 3.12).

Beweis von Behauptung 3:
Für alle natürlichen Zahlen $p,t,i \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{N} \models \psi[p,t,i,n]$, nämlich

- n ist die kleinste natürliche Zahl $\leqslant t$ mit $\mathcal{N} \models \varphi[p,t,i,n]$, falls es eine solche Zahl gibt
- n ist 0, falls es keine natürliche Zahl $n' \leqslant t$ mit $\mathcal{N} \models \varphi[p,t,i,n']$ gibt.

$\square_{\text{Behauptung 3}}$

Behauptung 4.
Für alle $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und alle $(n_0,\dots,n_{\ell-1}) \in \mathbb{N}^\ell$ gibt es Zahlen $p,t \in \mathbb{N}$ so dass gilt:

- $t \geqslant \max\{\ell, n_0, \dots, n_{\ell-1}\}$, und
- für alle $i \in \{0,\dots,\ell-1\}$ ist $\beta'(p,t,i) = n_i$

Beweis von Behauptung 4:
Folgt unmittelbar aus der Konstruktion der Formel ψ.

$\square_{\text{Behauptung 4}}$

Behauptung 5.
Die Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$g(y_1, y_2) \;:=\; \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 1) \cdot (y_1 + y_2) + y_2 \qquad \text{(f.a. } y_1, y_2 \in \mathbb{N}\text{)}$$

ist bijektiv.

Beweis von Behauptung 5:
Übung.

$\square$Behauptung 5

Die folgende Δ_0-Formel $\gamma(y_1, y_2, z)$ definiert die Funktion g aus Behauptung 5:

$$\gamma(y_1, y_2, z) \;:=\; (1+1) \cdot z \;=\; (y_1 + y_2 + 1) \cdot (y_1 + y_2) + (1+1) \cdot y_2$$

Sei nun $\varphi_\beta(z, w, y)$ die folgendermaßen definierte Δ_0-Formel:

$$\varphi_\beta(z, w, y) \;=\; \exists u \leqslant z \, \exists v \leqslant z \, \big(\gamma(u, v, z) \;\wedge\; \psi(u, v, w, y)\big)$$

Behauptung 6.
Die Δ_0-Formel $\varphi_\beta(z, w, y)$ definiert eine Funktion $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, die die Bedingungen von Lemma 3.15 erfüllt.

Beweis von Behauptung 6:
Die Formel $\varphi_\beta(z, w, y)$ definiert die Funktion $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\beta(g(p, t), i) = \beta'(p, t, i)$, f.a. $p, t, i \in \mathbb{N}$ (da g bijektiv ist, ist β wohldefiniert und hat Definitionsbereich $\mathbb{N}^2$). Behauptung 6 folgt unmittelbar aus Behauptung 4 und der Tatsache, dass $g(p, t) \geqslant t$ ist.

$\square$Behauptung 6

3.3.2 *Ein formales Berechnungsmodell*

Folie 151

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass alle berechenbaren Funktionen und rekursiv aufzählbaren Relationen durch FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln definiert werden können (im Sinne von Definition 3.12) (- daraus werden wir dann z.B. folgern, dass Th$(\mathcal{N})$ nicht rekursiv aufzählbar ist).

Dazu müssen wir allerdings einen präzisen **Berechnungs**-Begriff verwenden. Gemäß der Church-Turing-These könnten wir dazu jedes

„sinnvolle“ Berechnungsmodell wählen (z.B. Turingmaschinen, Registermaschinen, WHILE-Programme,…). Für unsere Zwecke besonders bequem ist, das folgende formale Berechnungsmodell zu verwenden:

Folie 152

Wir betrachten **deterministische 1-Band-Turingmaschinen**

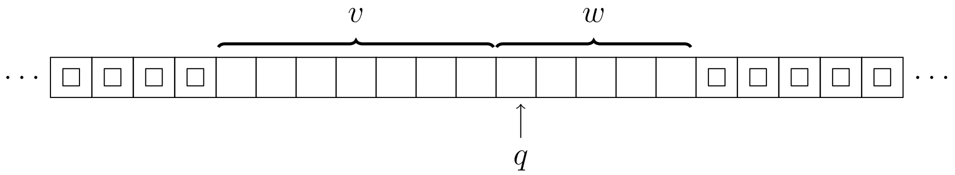
$$\mathrm{M}{=}(\mathrm{Q},\ \mathrm{A}_{\mathrm{TM}},\ \delta,\ q_0,\ \mathrm{F})$$

wobei Q die Menge der Zustände, A_{TM} das Bandalphabet, q_0 den Startzustand, F die Menge der Endzustände und $\delta : \mathrm{Q}\backslash\mathrm{F} \times \mathrm{A}_{\mathrm{TM}} \to \mathrm{Q} \times \mathrm{A}_{\mathrm{TM}} \times \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\}$ die Übergangsfunktion bezeichnet. Wir betrachten das feste Alphabet $\mathrm{A}_{\mathrm{TM}} := \{\,|\,, \#, \Box\}$, wobei $|$ zur unären Darstellung natürlicher Zahlen dient, # als Trennsymbol und $\Box$ als Leerzeichen (Blank) verwendet wird. O.B.d.A. gelte stets $\mathrm{Q}\cap\mathrm{A}_{\mathrm{TM}} = \emptyset$.

Folie 153

Konfigurationen

Konfigurationen von M beschreiben wir als Wörter $\kappa = vqw \in (\mathrm{A}_{\mathrm{TM}} \cup \mathrm{Q})^*$, wobei $v, w \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}^*$ und $q \in \mathrm{Q}$ ist.
$\kappa = vqw$ beschreibt folgende Konfiguartion von M:



D.h.: q ist der aktuelle Zustand, vw ist der nicht-leere Teil der Bandbeschriftung und der Schreib-/Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w (bzw., falls $w = \varepsilon$ das leere Wort ist, so steht der Schreib-/Lesekopf auf dem ersten Blank-Symbol $\Box$ rechts von der aktuellen Beschriftung v des Bandes).

Nachfolgekonfigura

Wir schreiben $\kappa \to_{\mathrm{M}} \kappa'$, um auszudrücken, dass κ' die **Nachfolgekonfiguration** von κ ist.

Folie 154

Berechnung von

Eine **Berechnung von** M ist eine endliche Folge von aufeinanderfolgenden Konfigurationen. Wir schreiben $\kappa \to_{\mathrm{M}}^* \kappa'$, um auszudrücken, dass es eine Berechnung gibt, die κ in κ' überführt.

Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$|^n \ := \underbrace{|\,|\dots|}_{n\text{-mal}} \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}^*$$

Unärdarstellung

die **Unärdarstellung** von n

Folie 155

Definition 3.16.

(a) Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ heißt **TM-berechenbar**, wenn es eine deterministische 1-Band-Turingmaschine M=(Q, A_{TM}, δ, q_0, F) gibt, so dass für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt

TM-berechenbar

$$f(m_1, \ldots, m_k) = n \iff \text{es gibt ein } q \in \mathrm{F}, \text{ so dass } q_0 \,|^{m_1} \# |^{m_2} \# \ldots \# |^{m_k} \;\to_{\mathrm{M}}^{*}\; |^{n}\, q$$

Beachte: Für $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k \setminus \mathrm{Def}(f)$ gilt: es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathrm{F}$, so dass $q_0 \,|^{m_1} \# |^{m_2} \# \ldots \# |^{m_k} \;\to_{\mathrm{M}}^{*}\; |^{n}\, q$.

(b) Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt **TM-rekursiv aufzählbar**, wenn die partielle Funktion f_R von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ mit $\mathrm{Def}(f_R) = R$ und $f_R(m_1, \ldots, m_k) = 1$, für alle $(m_1, \ldots, m_k) \in R$ TM-berechenbar ist.

TM-rekursiv aufzählbar

Die Church-Turing-These besagt, dass die TM-berechenbaren partiellen Funktionen (und die TM-rekursiv aufzählbaren Relationen) genau die berechenbaren partiellen Funktionen (bzw. die rekursiv aufzählbaren Relationen) sind.

3.3.3 FO-Definierbarkeit von TM-Berechnungen und die Unentscheidbarkeit der Arithmetik

Folie 156

Im Folgenden werden wir zeigen, dass jede (TM-)berechenbare partielle Funktion durch eine FO[σ_{Ar}]-Formel definiert werden kann.

Vereinbarung 3.17.
Wir indentifizieren das Symbol $\Box$ mit der Zahl 0, das Symbol $|$ mit der Zahl 1 und das Symbol $\#$ mit der Zahl 2.
Außerdem nehmen wir immer an, dass die Zustandsmenge Q unserer Turingmaschinen endliche Teilmengen von $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ sind.
Dadurch können wir jede Konfiguration $\kappa = vqw \in (\mathrm{A}_{\mathrm{TM}} \cup \mathrm{Q})^*$ als eine endliche Folge natürlicher Zahlen auffassen, die wir mit der β-Funktion durch eine natürliche Zahl kodieren können.

Folie 157

Lemma 3.18 (Kodierungen von Konfigurationen sind Δ_0-definierbar)**.**
Sei $M=(Q,\ \mathrm{A}_{\mathrm{TM}},\ \delta,\ q_0,\ F)$ eine deterministische 1-Band-Turingmaschine. Dann gibt es eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Konf}(x,y)$ so dass für alle $s,\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Konf}[s,\ell] \iff B(s,\ell) \text{ repräsentiert eine Konfiguration von } M$$

Zur Erinnerung: $B(s,\ell) := (\beta(s,0),\dots,\beta(s,\ell-1))$.

Beweis:
Sei φ_β die Δ_0-Formel, die gemäß Lemma 3.15 die Funktion $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert. Wir wählen

$$\begin{aligned}
\varphi^M_{Konf}(x,y) := \exists z < y\, \exists w \leqslant x \Big(& \\
\varphi_\beta(x,z,w) \ \wedge \ \big(& \bigvee_{q\in Q} w = \underline{q}\ \big) \wedge \\
\forall z' < y \, \big(\neg z'{=}z \ \to \ (\varphi_\beta(x,z',\underline{0}) \ & \vee \ \varphi_\beta(x,z',\underline{1}) \ \vee \ \varphi_\beta(x,z',\underline{2}))\,\big)\Big)
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile der Formel wird gesagt, dass es in der von x kodierten Folge der Länge y eine Position z gibt, an der ein Zustand (w) steht. Hierbei bezeichnet $\underline{q}$ den Zahlterm von $q \in Q \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. In Zeile 3 wird gesagt, dass an allen anderen Positionen in der Folge eins der Symbole 0,1 oder 2 steht.

□

Folie 158

Lemma 3.19 (Δ_0-Definierbarkeit von TM-Berechnungen)**.**
Sei $M=(Q,\ \mathrm{A}_{\mathrm{TM}},\ \delta,\ q_0,\ F)$ eine Turingmaschine.

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Start,k}(x,y,z_1,\dots,z_k)$, so dass für alle $s,\ell,m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Start,k}[s,\ell,m_1,\dots,m_k] \iff B(s,\ell) \text{ kodiert die Konfiguration } q_0\,|^{m_1}\,\#\dots\#\,|^{m_k} \text{ (also die Startkonfiguration von } M \text{ bei Eingabe } (m_1,\dots,m_k)\in\mathbb{N}^k)$$

(b) Es gibt eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Stopp}(x,y,z)$, so dass für alle $s,\ell,n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Stopp}[s,\ell,n] \iff \text{es gibt ein } q \in F \text{, so dass } B(s,\ell) \text{ die Konfiguration } |^n q \text{ kodiert}$$

Folie 159

(c) *Es gibt eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Schritt}(x,y,x',y')$, so dass für alle $s,\ell,s',\ell' \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Schritt}[s,\ell,s',\ell'] \iff B(s,\ell) \text{ und } B(s',\ell') \text{ kodieren Konfigurationen } \kappa \text{ und } \kappa' \text{ von } M \text{ s.d. } \kappa \to_M \kappa' \text{ (d.h. } \kappa' \text{ ist Nachfolgekonfiguration von } \kappa)$$

Beweis:

(a) $\varphi^M_{Start,k}(x,y,z_1,\ldots,z_k)$ besagt: $B(x,y)$ repräsentiert eine Konfiguration von M - und zwar die, die an Position 0 den Zustand q_0 hat, dann z_1 viele Einsen, gefolgt von einer 2 ($\hat{=}\,\#$), gefolgt von z_2 vielen Einsen,... usw.

Speziell für $k=2$ wählen wir:

$$\begin{aligned}\varphi^M_{Start,k}(x,y,z_1,z_2) := {} & \varphi_\beta(x,\underline{0},\underline{q_0}) \\ & \wedge \forall z_1' \leqslant z_1 \big(1 \leqslant z_1' \to \varphi_\beta(x,z_1',1)\big) \\ & \wedge\ \varphi_\beta(x,z_1+1,\underline{2}) \\ & \wedge\ \forall z_2' \leqslant z_1+z_2+1\big(z_1+\underline{2} \leqslant z_2' \to \varphi_\beta(x,z_2',1)\big) \\ & \wedge\ y = z_1+z_2+\underline{2}\end{aligned}$$

Für allgemeines k: Übung.

(b) Analog zu (a).

(c) $\varphi^M_{Schritt}(x,y,x',y')$ besagt:

- $B(x,y)$ und $B(x',y')$ repräsentieren Konfigurationen (nutze dazu Lemma 3.18)
- An allen Stellen außer der Kopfposition und unmittelbar daneben sind die beiden Konfigurationen identisch
- An der Kopfposition und unmittelbar daneben unterscheiden sich die beiden Konfigurationen gemäß der Übergangsfunktion δ.

Details: Übung.

$\square$

Folie 160

Definition 3.20 (Die Klasse $\Sigma_1 \subseteq \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$)**.**
Die Menge Σ_1 besteht aus allen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei $x \in \mathsf{VAR}$ und $\varphi \in \Delta_0$.

Satz 3.21 (Σ_1-Definierbarkeit der berechenbaren partiellen Funktionen und der rek. aufzählbaren Relationen)**.**

(a) Jede ***TM-berechenbare*** *partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ (für $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ beliebig) ist Σ_1-definierbar.*

(b) Jede ***TM-rekursiv aufzählbare*** *Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ (f.a. $k \in \mathbb{N}$) ist Σ_1-definierbar.*

Beweis:

(a) Sei M eine Turingmaschine, die f berechnet (im Sinne von Definition 3.16). Im Folgenden konstruieren wir eine Σ_1-Formel $\varphi_f(x_1, \ldots, x_k, y)$, so dass für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi_f[m_1, \ldots, m_k, n] \iff & f(m_1, \ldots, m_k) = n \\ & \text{(insb.: } (m_1, \ldots, m_k) \in \text{Def}(f)\text{)} \\ \iff & \text{es gibt ein } q \in \text{F mit} \\ & q_0 \,|^{m_1} \# \ldots \# \,|^{m_k} \to_M^* \;|^n\, q. \end{aligned}$$

Eine Folge $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r$ von Konfigurationen der Längen $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r$ wird kodiert durch ein Tupel $(s_1, \ell_1, s_2, \ell_2, s_r, \ell_r)$ von natürlichen Zahlen, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $B(s_i, \ell_i)$ kodiert die Konfiguration κ_i.

In der folgenden Formel φ_f repräsentiert die Variable u diejenige natürliche Zahl s für die gilt: $B(s, 2r) = (s_1, \ell_1, s_2, \ell_2, \ldots, s_r, \ell_r)$. Die Zahl $r - 1$ wird durch die Variable z repräsentiert. Die Variablen v und v' repräsentieren zwei Konfigurationen; die Variablen w und w'

repräsentieren die Längen dieser beiden Konfigurationen.

$$\begin{aligned}
\varphi_f(x_1,\dots,x_k,y) \;:=\; &\exists u\, \exists z \leqslant u\Big(\\
&\quad \exists v \leqslant u\, \exists w \leqslant u\big(\varphi_\beta(u,\underline{0},v) \,\wedge\, \varphi_\beta(u,\underline{1},w) \,\wedge\, \varphi^M_{\mathit{Start},k}(v,w,x_1,\dots,x_k)\big) \\
&\quad \wedge\, \exists v \leqslant u\, \exists w \leqslant u\big(\varphi_\beta(u,\underline{2}\cdot z,v) \,\wedge\, (\varphi_\beta(u,\underline{2}\cdot z+1,w) \,\wedge\, \varphi^M_{\mathit{Stopp}}(v,w,y)\big) \\
&\quad \wedge\, \forall v \leqslant u \forall w \leqslant u \forall v' \leqslant u \forall w' \leqslant u \forall z' \leqslant z\big(\underline{2}\cdot z' + \underline{3} \leqslant \underline{2}\cdot z + \underline{1} \rightarrow \\
&\qquad \Big(\big(\varphi_\beta(u,\underline{2}\cdot z',v) \,\wedge \varphi_\beta(u,\underline{2}\cdot z'+\underline{1},w) \,\wedge\, \varphi_\beta(u,\underline{2}\cdot z'+\underline{2},v') \\
&\qquad \wedge\, \varphi_\beta(u,\underline{2}\cdot z'+\underline{3},w')\big) \,\rightarrow\, \varphi^M_{\mathit{Schritt}}(v,w,v',w')\big)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

- Die zweite Zeile der Formel besagt, dass die ersten beiden Einträge in der durch u kodierten Folge die Startkonfiguration von M bei Eingabe von $(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k$ repräsentiert.
- Die dritte Zeile besagt, dass die letzten beiden Einträge in der durch u kodierten Folge (der Länge $2\cdot z+2$) eine Stopp-Konfiguration von M mit Ausgabe y repräsentiert.
- Die letzten drei Zeilen der Formel besagen, dass jedes Paar von aufeinanderfolgenden Konfigurationen in der durch u kodierten Folge einen Berechnungsschritt von M repräsentiert.

Somit ist φ_f eine Σ_1-Formel, die die partielle Funktion f definiert.

(b) Folgt leicht aus (a)

□

Bemerkung 3.22. Die Umkehrung von Satz 3.21 gilt ebenfalls.
D.h.: Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ (bzw. eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$) ist *genau dann* berechenbar (bzw. rekursiv aufzählbar), wenn sie Σ_1-definierbar ist. Details: Übung!

Folie 161

Als einfache Folgerung von Satz 3.21 erhalten wir

Satz 3.23 (Unentscheidbarkeit der Arithmetik)**.**
Th $(\mathcal{N})$ *ist* ***nicht*** *rekursiv aufzählbar.*
D.h.: Es gibt keinen Algorithmus, der nach und nach alle in der Standardarithmetik $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ *gültigen Sätze der Logik erster Stufe ausgibt.*

Beweis:
Sei $H \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge, die rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar ist. (Eine solche Menge gibt es - z.B. kann H als Menge der Gödelnummern von Turingmaschinen gewählt werden, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten halten).
Da H rekursiv aufzählbar ist, ist H Σ_1-definierbar. D.h. es existiert eine Σ_1-Formel $\varphi_H(x)$ s.d. f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \in H \iff \mathcal{N} \models \varphi_H[n] \iff \mathcal{N} \models \varphi_H\tfrac{n}{x} \qquad (*)$$

Angenommen, $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ wäre rekursiv aufzählbar. Dann ist $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ sogar entscheidbar - denn: Bei Eingabe eines $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satzes φ starte das Semientscheidungsverfahren für φ und $\neg\varphi$. Für eines der beiden wird „JA“ ausgegeben. Je nachdem kann insgesamt „JA“ oder „NEIN“ ausgegeben werden.
Lemma 3.11 (c) (für $\Phi := \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ und $\varphi(x) := \varphi_H(x)$) liefert die Entscheidbarkeit von $\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \models \varphi_H\tfrac{n}{x}\} \overset{(*)}{=} H$. ↯ da H nicht entscheidbar

□

3.4 Der Satz von Trakhtenbrot

Boris A. Trakthenbrot (kyrillisch: Трахтенброт): russisch-israelischer Mathematiker (*1921, † 2016); alternative Schreibweisen: Trachtenbrot, Trahenbrot

Folie 162

Definition 3.24. Sei σ eine Signatur.

im Endlichen erfüllbar

(a) Ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz φ heißt **im Endlichen erfüllbar**, falls es eine **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gibt, die φ erfüllt.

endl-Erf-FO[σ]

(b) Das **endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO**$[\sigma]$ (kurz: **endl-Erf-FO**$[\sigma]$) ist das wie folgt definierte Berechnungsproblem:

> ENDLICHES ERFÜLLBARKEITSPROBLEM FÜR $\mathrm{FO}[\sigma]$
> *Eingabe:* Ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz φ
> *Frage:* Ist φ im Endlichen erfüllbar?

Formal: endl-Erf-FO$[\sigma]$:= $\{\varphi : \varphi$ ist ein im Endlichen erfüllbarer $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz$\}$

Folie 163

Unter der Verwendung des Satzes von Gaifman (oder alternativ, des Satzes von Hanf), sieht man leicht, dass folgendes gilt:

Satz 3.25. *Ist σ eine relationale Signatur, die ausschließlich aus Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für* $\mathrm{FO}[\sigma]$ *entscheidbar.*

Beweis: Übung.

□

Der Satz von Trakhtenbrot besagt, dass Satz 3.25 nicht für Signaturen gilt, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthalten:

Satz 3.26 (Satz von Trakhtenbrot, 1950)**.**
Ist σ eine Signatur, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthält, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\sigma]$ *rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar.*

Beweis:
Die Semi-Entscheidbbarkeit erhält man durch einen Algorithmus, der bei Eingabe eines $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satzes φ nach und nach für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sämtliche σ-Strukturen $\mathcal{A}$ mit Universum $\{1, \ldots, n\}$ erzeugt und für jede dieser Strukturen testet, ob sie φ erfüllen. Da ein Problem genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn es semi-entscheidbar ist, folgt damit, dass endl-Erf-$\mathrm{FO}[\sigma]$ rekursiv aufzählbar ist.
Die Unentscheidbarkeit von endl-Erf-$\mathrm{FO}[\sigma]$ zeigen wir hier für den Spezialfall, dass $\sigma = \tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}}$ ist, wobei $\tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}} := \{\underset{2}{\leqslant}, \underset{3}{R_+}, \underset{3}{R_\cdot}, \underset{1}{R_0}, \underset{1}{R_1}\}$.
Die allgemeine Aussage (für beliebige Signaturen, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthalten), erhält man dann, indem man endliche $\tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}}$-Strukturen auf geeignete Weise durch endliche gerichtete Graphen repräsentiert (Details: Übung).
Um die Unentscheidbarkeit von endl-Erf-$\mathrm{FO}[\tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}}]$ nachzuweisen, betrachten wir eine Menge $H \subseteq \mathbb{N}$, die rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar ist. (Eine solche Menge gibt es - z.B. indem die Zahlen in H genau diejenigen Turingmaschinen repräsentieren, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhalten).
Da H rekursiv aufzählbar ist, gibt es gemäß Satz 3.21 (b) eine Σ_1-Formel $\varphi_H(x)$, die H definiert. D.h.: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in H \iff \mathcal{N} \models \varphi_H[n]$.
Betrachte nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ den $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz $\varphi_n := \varphi_H(\underline{n}) = \varphi_H\frac{\underline{n}}{x}$.
Offensichtlicherweise gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

1) $\mathcal{N} \models \varphi_n \iff n \in H$, und

2) φ_n ist ein Σ_1-Satz, d.h. es gibt eine Variable y und eine Δ_0-Formel $\psi_n(y)$, so dass $\varphi_n = \exists y\, \psi_n(y)$.

Ziel: Wir nutzen im Folgenden φ_n, um einen FO$[\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}]$-Satz $\tilde{\varphi}_n$ zu konstruieren, für den gilt

$$\tilde{\varphi}_n \text{ ist im Endlichen erfüllbar} \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi_n \Leftrightarrow n \in H. \qquad (*_0)$$

Daraus folgt dann direkt, dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO$[\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}]$ nicht entscheidbar ist. (Denn sonst wäre H entscheidbar, indem man bei Eingabe einer Zahl n zunächst die Formel $\tilde{\varphi}_n$ erzeugt und dann testet, ob $\tilde{\varphi}_n$ im Endlichen erfüllbar ist).
Die Konstruktion der Formel $\tilde{\varphi}_n$ erfolgt in mehreren Schritten:

Schritt 1: Sei z eine Variable, die nicht in der Formel $\varphi_n = \exists y\, \psi_n(y)$ vorkommt. Sei $\varphi'_n := \exists z\, \exists y < z\, \psi'_n(y,z)$, wobei $\psi'_n(y,z)$ die Formel ist, die aus der Δ_0-Formel $\psi_n(y)$ entsteht, indem zunächst

- jede Teilformel der Form $\exists v \leqslant t\ \chi$ (bzw. $\forall v \leqslant t\ \chi$) ersetzt wird durch die Formel $\exists v < z\,(v \leqslant t \wedge \chi)$ (bzw. $\forall v < z\,(v \leqslant t \rightarrow \chi)$), und danach
- jede atomare Formel α, in der Terme $t_1, \ldots, t_\ell$ vorkommen, ersetzt wird durch die Formel $(\alpha \wedge t_1 \leqslant z \wedge \cdots \wedge t_\ell \leqslant z)$.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass folgendes gilt:

$$\mathcal{N} \models \varphi'_n \iff \mathcal{N} \models \varphi_n \qquad (*_1)$$

Setze nun $\xi'_n(z) := \exists y < z\ \psi'_n(y,z)$ und beachte, dass $\varphi'_n = \exists z\, \xi'_n(z)$. Gemäß der in Schritt 1 durchgeführten Konstruktion ist $\xi'_n(z)$ eine Δ_0-Formel, in der jede Quantifizierung einer Variablen v beschränkt ist durch $v < z$, und in der jeder Term t beschränkt ist durch $t < z$.

Schritt 2: Es lässt sich zeigen (siehe auch [EFT98], Kapitel 8), dass es zu der FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel $\xi'_n(z)$ eine FO$[\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}]$-Formel $\tilde{\xi}'_n(z)$ gibt, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \xi'_n[m] \iff \mathcal{N}_{rel} \models \tilde{\xi}'_n[m].$$

$\mathcal{N}_{rel}$ ist hierbei die $\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$-Struktur, die aus $\mathcal{N}$ entsteht, wenn wir die Funktionen in σ_{Ar} in ihre entsprechenden Relationen überführen.
Insbesondere gilt für $\tilde{\varphi}'_n := \exists z\, \tilde{\xi}_n(z)$, dass

$$\mathcal{N}_{rel} \models \tilde{\varphi}'_n \iff \mathcal{N} \models \varphi'_n \qquad (*_2)$$

Aufgrund der Details bei der Konstruktion von $\tilde{\xi}'_n(z)$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass in der Formel $\tilde{\xi}'_n(z)$ jede Quantifizierung einer Variablen v beschänkt ist durch $v < z$.

<u>Schritt 3:</u> Für jedes $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei nun $\mathcal{N}_{|\{0,\dots,m\}}$ die Substruktur von $\mathcal{N}_{rel}$ mit Universum $\{0, \dots, m\}$.
Da in $\tilde{\xi}'_n(z)$ alle Quantifizierungen einer Variablen v durch $v < z$ beschränkt sind, gilt für alle $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und alle $m' \geqslant m$:

$$\mathcal{N}_{rel} \models \tilde{\xi}'_n[m] \iff \mathcal{N}_{|\{0,\dots,m'\}} \models \tilde{\xi}'_n[m].$$

Daraus folgt, dass für den FO$[\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}]$-Satz $\tilde{\varphi}'_n := \exists z\, \tilde{\xi}'_n(z)$ gilt:

$$\mathcal{N}_{rel} \models \tilde{\varphi}'_n \iff \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \text{ mit } \mathcal{N}_{|\{0,\dots,m\}} \models \tilde{\varphi}'_n. \qquad (*_3)$$

<u>Schritt 4:</u> Wir konstruieren nun einen FO$[\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}]$-Satz η, so dass gilt:
Für jede endliche $\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \eta \iff \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}, \text{ s.d. } \mathcal{A} \cong \mathcal{N}_{|\{0,\dots,m\}} \qquad (*_4)$$

Beachte: Dann gilt für den FO$[\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}]$-Satz $\tilde{\varphi}_n := (\tilde{\varphi}'_n \wedge \eta)$ folgendes:

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_n \text{ ist im Endlichen erfüllbar} \\ \overset{(*_4)}{\iff} & \text{ es gibt ein } m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \text{ mit } \mathcal{N}_{|\{0,\dots,m\}} \models \tilde{\varphi}'_n \\ \overset{(*_3)}{\iff} & \mathcal{N}_{rel} \models \tilde{\varphi}'_n \\ \overset{(*_2)}{\iff} & \mathcal{N} \models \varphi'_n \\ \overset{(*_1)}{\iff} & \mathcal{N} \models \varphi_n \quad \overset{(*_0)}{\iff} n \in H \end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{\varphi}_n$ die für $(*_0)$ gesuchte Formel.

Um den Beweis von Satz 3.26 abzuschließen, genügt es also, die für $(*_4)$ gesuchte Formel η zu finden.
Dazu konstruieren wir einen FO$[\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}]$-Satz η, der in einer $\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$-Struktur $\mathcal{A}$ folgendes besagt:

1) $|A| \geqslant 2$

2) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist eine diskrete lineare Ordnung mit kleinstem und größtem Element.
   Im Folgenden bezeichnen wir mit 0, 1, max das kleinste, das zweitkleinste und das größte Element bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$.

3) $R_0^{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $R_1^{\mathcal{A}} = \{1\}$

4) $R_+^{\mathcal{A}}$ ist der Graph einer partiellen Funktion $+$ von $A \times A$ nach A, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

   4.1) Für alle $(a,b) \in \mathrm{Def}(+)$ gilt: $(b,a) \in \mathrm{Def}(+)$ und $b+a = a+b$

   4.2) Für alle $a \in A$ gilt: $(a,0) \in \mathrm{Def}(+)$ und $a+0 = a$

   4.3) Für alle $a \in A$ gilt
   - $(a,1) \in \mathrm{Def}(+) \iff a \neq \max$, und
   - falls $a \neq \max$, so ist $a+1$ der Nachfolger von a bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$.

   4.4) Für alle $(a,b) \in \mathrm{Def}(+)$ mit $a+b \neq \max$ gilt:
   - $b \neq \max$,
   - $(a, b+1) \in \mathrm{Def}(+)$, und
   - $a + (b+1) = (a+b)+1$.

5) $R_\cdot^{\mathcal{A}}$ ist der Graph einer partiellen Funktion $\cdot$ von $A \times A$ nach A, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

   5.1) Für alle $(a,b) \in \mathrm{Def}(\cdot)$ gilt: $(b,a) \in \mathrm{Def}(\cdot)$ und $b \cdot a = a \cdot b$

   5.2) Für alle $a \in A$ gilt: $(a,0) \in \mathrm{Def}(+)$ und $a+0 = a$
   - $(a,0) \in \mathrm{Def}(\cdot)$ und $a \cdot 0 = 0$, und
   - $(a,1) \in \mathrm{Def}(\cdot)$ und $a \cdot 1 = a$.

   5.3) Für alle $a \in A$ gilt

      5.2.1) Für alle $a \in A$ mit $(a,a) \in \mathrm{Def}(+)$ gilt:
      - $(a, 1+1) \in \mathrm{Def}(\cdot)$ und
      - $a \cdot (1+1) = a+a$.

      5.2.2) Für alle $a,b \in A$ mit $(a,b) \in \mathrm{Def}(\cdot)$ und $a \neq 0$ und $a \cdot b, a) \in \mathrm{Def}(+)$ gilt:
      - $(b,1) \in \mathrm{Def}(+)$,
      - $(a, b+1) \in \mathrm{Def}(\cdot)$ und
      - $a \cdot (b+1) = a \cdot b + a$.

Die Bedingungen 1) - 5) können leicht durch einen FO[$\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$]-Satz η formalisiert werden.
Man kann zeigen (Details: Übung), dass für jede endliche $\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}$ erfüllt die Bedingungen 1) - 5) genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{N}_{|\{0,\dots,m\}}$.

□

3.4.1 Folgerungen aus dem Satz von Trakhtenbrot

Folie 164

Wir betrachten zunächst die folgende „endliche Variante“ des Allgemeingültigkeitsproblems

Definition 3.27. Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz φ heißt **im Endlichen allgemeingültig**, falls für jede **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$.

im Endlichen allgemeingültig

(b) Das **endliche Allgemeingültigkeitsproblem für FO**[σ] (kurz: **endl-Allg-FO**[σ]) ist folgende Berechnungsproblem:

endl-Allg-FO[σ]

ENDLICHES ALLGEMEINGÜLTIGKEITSPROBLEM FÜR FO[σ]
Eingabe: Ein FO[σ]-Satz φ
Frage: Ist φ im Endlichen allgemeingültig?

Formal: endl-Allg-FO[σ] := $\{\varphi : \varphi$ ist ein im Endlichen allgemeingültiger FO[σ]-Satz$\}$

Folie 165

Als Folgerung aus Satz 3.25 und Satz 3.26 erhalten wir:

Korollar 3.28 ((Un-)Entscheidbarkeit des endlichen Allgemeingültigkeitsproblems für FO[σ])**.**
Sei σ eine Signatur.

*(a) Falls σ relational ist und alle Relationssymbole die Stelligkeit 1 haben, so ist das Problem endl-Allg-*FO[σ] *entscheidbar.*

*(b) Falls σ mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthält, so ist das Problem endl-Allg-*FO[σ] *nicht rekursiv aufzählbar.*

Beweis:
Man beachte, dass für jeden FO[σ]-Satz φ gilt:

$$\varphi \text{ ist nicht im Endl. erfüllbar} \iff \neg\varphi \text{ ist im Endl. allgemeingültig}$$

(a) Folgt daher direkt aus Satz 3.25.

(b) Falls endl-Allg-FO[σ] r.e. wäre, so wäre auch das Komplement vom endl-Erf-FO[σ] r.e. Somit wären sowohl endl-Erf-FO[σ] als auch das Komplement r.e., und daher wäre endl-Erf-FO[σ] entscheidbar. $\lightning$

$\square$

Bemerkung 3.29. Man vergleiche Korollar 3.28 (b) mit Korollar 3.3:
Die Menge aller allgemeingültigen Sätze ist rekursiv aufzählbar; die Menge aller im Endlichen allgemeingültigen Sätze nicht.

Folie 166

Unter Verwendung des Satzes von Trakhtenbrot kann man die Unentscheidbarkeit vieler konkreter Logikprobleme nachweisen. Im Folgenden wird dies exemplarisch an der Eigenschaft der **Ordnungsinvarianz** von Formeln dargelegt.

Definition 3.30 (Ordnungsinvarianz)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, das **nicht** zu σ gehört.

im Endlichen ordnungsinvariant

(a) Ein FO[$\sigma \cup \{\leqslant\}$]-Satz φ heißt **im Endlichen ordnungsinvariant**, falls für alle **endlichen** σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle linearen Ordnungen $\leqslant_1^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant_2^{\mathcal{A}}$ auf A gilt: $(\mathcal{A}, \leqslant_1^{\mathcal{A}}) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \leqslant_2^{\mathcal{A}}) \models \varphi$.

(b) Das **endliche Ordnungsinvarianz-Problem für FO**[$\sigma \cup \{\leqslant\}$] ist das folgende Berechnungsproblem:

ENDLICHES ORDNUNGSINVARIANZ-PROBLEM FÜR FO[$\sigma \cup \{\leqslant\}$]
Eingabe: Ein FO[$\sigma \cup \{\leqslant\}$]-Satz φ
Frage: Ist φ im Endlichen ordnungsinvariant?

Formal: endl-Ordinv-FO[$\sigma \cup \{\leqslant\}$] := {$\varphi$: φ ist ein im Endlichen ordnungsinvarianter FO[$\sigma \cup \{\leqslant\}$]-Satz}

Unter Verwendung de Satzes von Trakthenbrot kann man leicht einen Beweis für den folgenden Satz finden:

Satz 3.31 (Unentscheidbarkeit der Ordnungsinvarianz).
Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Relationssymbol R mit $\operatorname{ar}(R) \geqslant 2$ und ein weiteres Relationssymbol P mit $\operatorname{ar}(P) \geqslant 1$ enthält. Dann ist das Problem endl-Ordinv-$\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ *nicht entscheidbar.*

Beweis:
Aus Korollar 3.28 (b) wissen wir, dass das Problem endl-Allg-FO$[\{R\}]$ nicht entscheidbar ist. Im Folgenden nehmen wir an, dass das Problem endl-Ordinv-FO$[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ entscheidbar wäre und zeigen, dass dann auch endl-Allg-FO$[\{R\}]$ entscheidbar sein müsste.
Wir betrachten o.B.d.A. den Fall, dass $\operatorname{ar}(P) = 1$ ist. Bei Eingabe eines FO$[\{R\}]$-Satzes ψ geht unser Algorithmus zum Entscheiden, ob ψ im Endlichen allgemeingültig ist, folgendermaßen vor:

1) Teste, ob für alle $\{R\}$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $A = \{1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models \psi$.
   Falls nein: STOP mit Ausgabe „ψ ist nicht im Endl. allgemeingültig“.
   Sonst: weiter mit Schritt 2.

2) Sei $\tilde{\psi}$ ein geeigneter FO$[\{R, P, \leqslant\}]$-Satz. Teste, ob $\tilde{\psi}$ im Endlichen ordnungsinvariant ist.
   Falls ja, so STOP mit Ausgabe „ψ ist im Endl. allgemeingültig“
   Sonst: STOP mit Ausgabe „ψ ist nicht im Endlichen allgemeingültig“.

Die Formel $\tilde{\psi}$ ist dabei wie folgt gewählt: $\tilde{\psi} := (\neg\psi \to \chi)$, wobei

$$\chi := \exists x\big(P(x) \land \forall y\big(\big(P(y) \leftrightarrow x = y\big) \land x \leqslant y\big)\big)$$

Man beachte, dass für alle endlichen $\{P\}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle linearen Ordnungen $\leqslant^{\mathcal{A}}$ auf A gilt:

$$(A, \leqslant^{\mathcal{A}}) \models \chi \iff P^{\mathcal{A}} = \{\min^{\mathcal{A}}\}, \text{ wobei } \min^{\mathcal{A}} \text{ das kleinste Element in } A \text{ bzgl. } \leqslant^{\mathcal{A}} \text{ ist.}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi} \text{ ist im Endlichen ordnungsinvariant} \\ \iff\ & \text{f.a. endlichen } \{R\}\text{-Strukturen } \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{A} \models \neg\psi \text{ gilt: } |A| \leqslant 1 \\ \iff\ & \text{f.a. endlichen } \{R\}\text{-Strukturen } \mathcal{A} \text{ mit } |A| \geqslant 2 \text{ gilt: } \mathcal{A} \models \psi \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der oben angegebene Algorithmus die korrekte Aussage liefert.

☐

Bemerkung 3.32. Der obige Beweis von Satz 3.31 zeigt sogar, dass das Problem endl-Ordinv-FO$[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ **nicht** semi-entscheidbar, also nicht rekursiv aufzählbar ist.

3.5 Literaturhinweise

Zur weiterführenden Lektüre werden das Kapitel 10 in [EFT98], sowie die Kapitel 15-18 aus [BBJ07] empfohlen.

3.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1
Sei A ein endliches Alphabet. Für eine Menge $L \subseteq A^*$ sei $\bar{L} := A^* \setminus L$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

(b) Jede entscheidbare Menge $L \subseteq A^*$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch $\bar{L}$ semi-entscheidbar sind.

(d) Wenn eine Menge $L \subseteq A^*$ semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist, dann ist $\bar{L}$ nicht semi-entscheidbar.

(e) Sind $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ rekursiv aufzählbare Mengen, so ist auch die Menge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 3.2(a) Berechnen Sie die Gödelnummern der σ_{Ar}-Terme $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ und $\underline{3}$.

(b) Beweisen Sie Lemma 3.11 (c), d.h.:

Sei Φ eine entscheidbare Menge von FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätzen und sei $\varphi(x)$ eine FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel.

Behauptung: Falls f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Phi \models \varphi\frac{n}{x} \quad \text{oder} \quad \Phi \models \neg\varphi\frac{n}{x} \ ,$$

dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \Phi \models \varphi\frac{n}{x}\}$ entscheidbar.

Aufgabe 3.3

Beweisen Sie Behauptung 5 aus dem Beweis von Lemma 3.15, d.h. zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$g(y_1, y_2) \quad := \quad \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 1)(y_1 + y_2) + y_2 \ , \qquad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathbb{N},$$

bijektiv ist.

Aufgabe 3.4

Definition: Die Menge Σ_1 besteht aus allen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei x eine Variable und φ eine Δ_0-Formel ist.

Definition: Für zwei $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formeln ψ und ψ' schreiben wir $\psi \equiv_{\leqslant\text{-ord}} \psi'$, falls für jede σ_{Ar}-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, für die $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist, gilt: $\mathcal{I} \models \psi \iff \mathcal{I} \models \psi'$.
Seien φ_1 und φ_2 zwei Formeln in Σ_1.
Zeigen Sie, dass es Σ_1-Formeln $\varphi_\wedge$ und $\varphi_\vee$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi_\vee \ \equiv_{\leqslant\text{-ord}} \ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad \varphi_\wedge \ \equiv_{\leqslant\text{-ord}} \ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

Aufgabe 3.5

Beweisen Sie Lemma 3.8, d.h. zeigen Sie, dass die in Def.3.6 und 3.7 eingeführte Kodierung alle Eigenschaften aus Annahme 3.1 besitzt.

Aufgabe 3.6

Arbeiten Sie die Details der Konstruktion

(a) der Formel φ^M_{Stop} und

(b) der Formel $\varphi^M_{\text{Schritt}}$

aus Lemma 3.19 aus dem Skript aus.

Aufgabe 3.7

Beweisen Sie die Korrektheit der Aussage von Bemerkung 3.22, d.h. zeigen Sie:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ ist genau dann TM-berechenbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann TM-rekursiv aufzählbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.

Aufgabe 3.8

Welche der folgenden Relationen bzw. partiellen Funktionen sind Σ_1-definierbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(a) $\exp\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \exp(a, b) \ := \ a^b \quad (\text{f.a. } a, b \in \mathbb{N})$

(b) $\text{Bit} := \ \{(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: das i-te Bit in der Binärdarstellung von n ist 1 $\}$

(c) $\text{H} := \{n_M$: M ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält $\}$

(d) $\overline{\text{H}} \ := \ \mathbb{N} \setminus \text{H}$

Aufgabe 3.9

Zeigen Sie, dass es eine Σ_1-Formel φ gibt, so dass es keine zu $\neg\varphi$ bezüglich des Standardmodells $\mathcal{N}$ der Arithmetik äquivalente Σ_1-Formel gibt.

Aufgabe 3.10

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei R ein r-stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ heißt *im Endlichen monoton in R*, wenn für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Relationen $R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls} \ \ R_1^{\mathcal{A}} \subseteq R_2^{\mathcal{A}}, \ \ \text{so} \ \ \varphi\big(\mathcal{A}, R_1^{\mathcal{A}}\big) \subseteq \varphi\big(\mathcal{A}, R_2^{\mathcal{A}}\big),$$

wobei $\varphi(\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) := \{\bar{a} \in A^s : (\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

MONOTONIE IM ENDLICHEN:
Eingabe: Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$.
Frage: Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ im Endlichen monoton in R?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trakhtenbrot.

Aufgabe 3.11

Eine Signatur σ heißt *binär*, falls jedes Symbol in σ ein Relationssymbol der Stelligkeit 2 ist.

Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:
Es gibt eine endliche binäre Signatur $\hat{\sigma}$, so dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\hat{\sigma}]$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation beliebiger σ-Strukturen durch kantengefärbte Graphen, repräsentiert durch Strukturen über einer geeigneten binären Signatur $\hat{\sigma}$. Benutzen Sie die in der Vorlesung für $\sigma := \tilde{\sigma_{\text{Ar}}} := \{\leqslant, R_+, R_\cdot, R_0, R_1\}$ bewiesene Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für FO$[\sigma]$-Sätze, um die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für FO$[\hat{\sigma}]$-Sätze zu beweisen.

Aufgabe 3.12

Beweisen Sie Satz 3.25 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass gilt: Wenn σ eine relationale Signatur ist, die ausschließlich aus Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO$[\sigma]$ entscheidbar.

Aufgabe 3.13

Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:
Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO$[\sigma_{\text{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 3.11 bewiesene Aussage. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. σ_{Graph}-Strukturen).

Kapitel 4

Gödels Unvollständigkeitssätze

4.1 Theorien und Axiomatisierbarkeit

Für das gesamte Kapitel gehen wir davon aus, dass σ eine abzählbare, entscheidbare Signatur ist.

Folie 168

Definition 4.1 (Theorie)**.**

(a) Eine **σ-Theorie** (kurz: **Theorie**) ist eine Menge T von FO[σ]-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

σ-Theorie

(b) Eine Theorie T ist **vollständig**, wenn für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Eine Theorie T heißt **unvollständig**, wenn sie nicht vollständig ist.

(c) Eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen ist ein **Axiomensystem** für eine Theorie T (kurz: Φ **axiomatisiert** T), wenn gilt:

Axiomensystem

$$T = \{\varphi \in S_\sigma \, : \, \Phi \models \varphi\}.$$

(d) Eine Theorie T heißt **endlich axiomatisierbar**, wenn sie ein endliches Axiomensystem besitzt.

endlich axiomatisierbar

(e) Eine Theorie T heißt **effektiv axiomatisierbar**, wenn sie ein entscheidbares Axiomensystem besitzt.

effektiv axiomatisierbar

Folie 169

Beispiel:

- Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist $\text{Th}(\mathcal{A})$ eine vollständige σ-Theorie.
- Die **Gruppentheorie** T_{Gr} ist die Menge aller $\text{FO}[\sigma_{Gr}]$-Sätze, die aus den Gruppenaxiomen folgen (wobei $\sigma_{Gr} := \{\circ\}$ aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $\circ$ besteht)
(Details: siehe [EFT98])

Folie 170

Als Folgerung aus Lemma 3.2 erhalten wir

Korollar 4.2 (entscheidbare Theorie)**.**

(a) Jede effektiv axiomatisierbare Theorie ist rekursiv aufzählbar.

(b) Jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie ist entscheidbar

Beweis:

(a) Folgt direkt aus Lemma 3.2.

(b) Fall 1: T ist widerspruchsfrei. Da T vollständig ist, gilt dann für jeden $\text{FO}[\sigma]$-Satz φ entweder $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Bei Eingabe eines $\text{FO}[\sigma]$-Satzes φ kann unser Algorithmus zum Entscheiden, ob $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$ daher wie folgt vorgehen:
Nutze den Algorithmus aus Teil (a), um T aufzuzählen, bis entweder φ oder $\neg\varphi$ ausgegeben wird und gib entsprechend „$\varphi \in T$" bzw. „$\varphi \notin T$" aus.

Fall 2: T ist widerspruchsvoll (d.h. es gibt eine $\text{FO}[\sigma]$-Formel ψ mit $T \models \psi$ und $T \models \neg\psi$). Dann ist T nicht erfüllbar. Somit gilt für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma] : T \models \varphi$. Da T unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, ist T daher die Menge aller $\text{FO}[\sigma]$-Sätze. Diese ist gemäß Annahme 3.1 (a) entscheidbar.

□

4.2 Die Minimale Arithmetik

Folie 171

Definition 4.3 (Die Theorie Q).
Die **minimale Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Theorie Q, die von den folgenden $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätzen axiomatisiert wird:

minimale Arithmetik

$$\begin{aligned}
\psi_{(Q1)} &:= \forall x\ \neg 0 = x+1 \\
\psi_{(Q2)} &:= \forall x\,\forall y\ (x+1 = y+1 \ \rightarrow\ x = y) \\
\psi_{(Q3)} &:= \forall x\ x+0 = x \\
\psi_{(Q4)} &:= \forall x\,\forall y\ x+(y+1) = (x+y)+1 \\
\psi_{(Q5)} &:= \forall x\ x\cdot 0 = 0 \\
\psi_{(Q6)} &:= \forall x\,\forall y\ x\cdot(y+1) = (x\cdot y)+x \\
\psi_{(Q7)} &:= \forall x\ (x \leqslant 0 \ \leftrightarrow\ x = 0) \\
\psi_{(Q8)} &:= \forall x\,\forall y\ (x \leqslant y+1 \ \leftrightarrow\ (x = y+1 \ \vee\ x \leqslant y)) \\
\psi_{(Q9)} &:= \forall x\,\forall y\,(x \leqslant y \ \vee\ y \leqslant x)
\end{aligned}$$

Folie 172

Lemma 4.4 („Korrektheit“ von Q).
Es gilt $Q \subseteq \text{Th}\,(\mathcal{N})$ *und für alle* $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Formeln* $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ *und alle* $m_1,\ldots,m_k \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\textit{Falls } Q \models \varphi\frac{m_1\ \cdots\ m_k}{x_1\ \cdots\ x_k},\ \textit{so } \mathcal{N} \models \varphi[m_1,\ldots,m_k].$$

Beweis:
Man sieht leicht, dass für jedes Axiom ψ von Q gilt: $\mathcal{N} \models \psi$. Daher gilt auch für jede Formel $\psi' \in Q$, dass $\mathcal{N} \models \psi'$. Somit gilt $Q \subseteq \text{Th}\,(\mathcal{N})$.
Insbesondere gilt daher für alle Formeln $\varphi(x_1,\ldots x_k) \in \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ und für alle $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ folgendes:
Falls $Q \models \varphi\frac{n_1\ \cdots\ n_k}{x_1\ \cdots\ x_k}$, so $\mathcal{N} \models \varphi\frac{n_1\ \cdots\ n_k}{x_1\ \cdots\ x_k}$, d.h. $\mathcal{N} \models \varphi[n_1,\ldots,n_k]$.

$\square$

Folie 173

Bemerkung: Q ist eine σ_{Ar}-Theorie, für die gilt

(1) Q ist widerspruchsfrei (da erfüllbar durch $\mathcal{N}$),

(2) Q ist effektiv axiomatisierbar (da Q ein endliches Axiomensystem besitzt)

und Q ist **unvollständig** (denn: $\mathcal{N} \models Q \Rightarrow$ falls Q vollständig wäre, so wäre $Q = \text{Th}(\mathcal{N})$. Wegen (2) und Korollar 4.2 wäre $\text{Th}(\mathcal{N})$ dann entscheidbar. $\lightning_{\text{zu Satz 3.23}}$).
Das heißt, es gibt Aussagen, die unabhängig von den Axiomen in Q sind.

Folie 174

Gödels erster Unvollständigkeitssatz besagt folgendes:
Jede σ_{Ar}-Theorie T, für die gilt:

(1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar),

(2) T ist effektiv axiomatisierbar (d.h. sie besitzt ein entscheidbares Axiomensystem), und

(3) $T \supseteq Q$ (d.h. T umfasst die „minimale Arithmetik“),

ist **unvollständig**, d.h. es gibt einen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz φ, so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt.

Um Gödels ersten Unvollständigkeitssatz beweisen zu können, müssen wir zunächst ein etwas genaueres Verständnis der „minimalen Arithmetik“ Q erlangen.

4.2.1 Der Σ_1-Transfersatz

Folie 175

Unser erstes „Etappenziel“ dabei ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz)**.**
Für jede Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ und für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi\frac{\underline{m_1}\ \cdots\ \underline{m_k}}{x_1\ \cdots\ x_k}$$

Die Richtung „$\Longleftarrow$“ des Σ_1-Transfersatzes folgt unmittelbar aus Lemma 4.4. Um die Richtung „$\Longrightarrow$“ des Σ_1-Transfersatzes zu beweisen, verwenden wir die beiden folgenden Lemmas, die uns ein genaueres Verständnis darüber liefern, wie die Modelle von Q aussehen:

Folie 176

Lemma 4.6. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathcal{A} \models Q$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:*

(a) $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m = n$

(b) $a \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\}$

(c) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m \leqslant n$

(d) $\underline{m}^{\mathcal{A}} +^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \;=\; \underline{m+n}^{\mathcal{A}}$

(e) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \cdot^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \;=\; \underline{m \cdot n}^{\mathcal{A}}$

(f) $0^{\mathcal{A}} = \underline{0}^{\mathcal{A}}$ *und* $1^{\mathcal{A}} = \underline{1}^{\mathcal{A}}$.

Beweis:

(a) „$\Longleftarrow$“ : klar, denn $m = n \Rightarrow \underline{m} = \underline{n} \Rightarrow \underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}}$.
„$\Longrightarrow$“ : Per Induktion nach m zeigen wir, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}}$, dann ist $m = n$.

$\underline{m = 0\text{:}}$ Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\underline{0}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}}$. Zu zeigen ist $0 = n$.
Angenommen, $n \neq 0$. Dann ist $n > 0$ und es gilt $\underline{n} = \underline{n-1} + 1$. Wegen $\mathcal{A} \models \psi_{(Q1)}$ gilt insbesondere $\mathcal{A} \models \neg 0 = \underline{n-1} + 1$. Somit gilt $0^{\mathcal{A}} \neq \underline{n}^{\mathcal{A}}$.
$\lightning$ zu $\underline{0}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}}$ und $\underline{0} = 0$.

$\underline{m \to m+1 \text{ :}}$ Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\underline{m+1}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}}$. Zu zeigen ist $m + 1 = n$.
Wegen $\mathcal{A} \models \psi_{(Q1)}$ und $\underline{m+1} = \underline{m} + 1$ gilt: $\mathcal{A} \models \neg 0 = \underline{m+1}$. Somit gilt $0^{\mathcal{A}} \neq \underline{m+1}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}}$. Daher ist $n \neq 0$, d.h. $n > 0$ (denn angenommen $n = 0$, so $\underline{n} = \underline{0}$ und $0^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}}$ $\lightning$).
Somit: $\underline{n} = \underline{n-1} + 1$ (mit $n - 1 \in \mathbb{N}$). Wegen $\mathcal{A} \models \psi_{(Q2)}$ folgt, dass $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n-1}^{\mathcal{A}}$. Gemäß Induktionsannahme gilt $m = n - 1$. Daher ist $m + 1 = n$.

(b) Aus $\mathcal{A} \models \psi_{(Q7)}$ und $\mathcal{A} \models \psi_{(Q8)}$ folgt induktiv, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \forall x \, \Big(x \leqslant \underline{n} \leftrightarrow \bigvee_{i=0}^{n} x = \underline{i}\Big)$$

(Details: Übung.) Daraus folgt, dass für alle $a \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\}.$$

(c) Wegen (a) und (b) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{m}^{\mathcal{A}} \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} &\iff \underline{m}^{\mathcal{A}} \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\} \\ &\iff m \in \{0,1,\ldots,n\} \\ &\iff m \leqslant n \end{aligned}$$

(d) Folgt induktiv aus $\mathcal{A} \models \psi_{(Q3)}$ und $\mathcal{A} \models \psi_{(Q4)}$. (Details: Übung.)

(e) Folgt induktiv aus $\mathcal{A} \models \psi_{(Q5)}$ und $\mathcal{A} \models \psi_{(Q6)}$. (Details: Übung.)

(f) $0^{\mathcal{A}} = \underline{0}^{\mathcal{A}}$ gilt, da $0 = \underline{0}$.
$1^{\mathcal{A}} = \underline{1}^{\mathcal{A}}$ folgt aus $\mathcal{A} \models \psi_{(Q3)}$, da $\underline{1} = 0 + 1$. (Details: Übung.)

☐

Folie 177

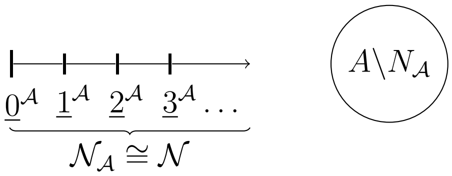
Bemerkung 4.7. Ist $\mathcal{A}$ ein Modell von Q, so sei $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ die folgendermaßen definierte Substruktur von $\mathcal{A}$:

- Universum von $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$: $N_{\mathcal{A}} := \{\underline{n}^{\mathcal{A}} : n \in \mathbb{N}\}$
- Für alle $a, b \in N_{\mathcal{A}}$ sei
  - $a \leqslant^{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}} b \;:\Leftrightarrow\; a \leqslant^{\mathcal{A}} b$
  - $a +^{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}} b \;:=\; a +^{\mathcal{A}} b$
  - $a \cdot^{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}} b \;:=\; a \cdot^{\mathcal{A}} b$

  Addition und Multiplikation sind wegen Lemma 4.6 (d), (e) wohldefiniert (für $a = \underline{m}^{\mathcal{A}}$ und $b = \underline{n}^{\mathcal{A}}$ gilt: $a +^{\mathcal{A}} b = \underline{m+n}^{\mathcal{A}} \in N_{\mathcal{A}}$).
- Ferner sei $0^{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}} := \underline{0}^{\mathcal{A}}$ und $1^{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}} := \underline{1}^{\mathcal{A}}$ (klar: $0^{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}}, 1^{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}} \in N_{\mathcal{A}}$ wegen Lemma 4.6 (f)).

Folie 178

Beachte: Aus Lemma 4.6 folgt: $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{N}$, da $\pi : (n \mapsto \underline{n}^{\mathcal{A}})_{n \in \mathbb{N}}$ ein Isomorphismus ist. Außerdem gilt wegen Lemma 4.6 (b) und Axiom $\psi_{(Q9)}$ für alle $a \in A \setminus N_{\mathcal{A}}$, dass $\underline{n}^{\mathcal{A}} \leqslant a$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$). Somit ist $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ ein „Anfangsstück“ von $\mathcal{A}$ bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$.



Folie 179

Zum Beweis des Σ_1-Transfersatzes benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 4.8. *Für jedes Modell $\mathcal{A}$ von Q gilt:*

(a) Ist $t(x_1,\dots,x_k)$ ein σ_{Ar}-Term und sind $n,m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$t^{\mathcal{A}}[\underline{m_1}^{\mathcal{A}},\dots,\underline{m_k}^{\mathcal{A}}] = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff t^{\mathcal{N}}[m_1,\dots,m_k] = n$$

(b) Ist $\varphi(x_1,\dots,x_k) \in \Delta_0$ und sind $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ so gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}},\dots,\underline{m_k}^{\mathcal{A}}] \iff \mathcal{N} \models \varphi[m_1,\dots,m_k]$$

(c) Ist $\varphi(x_1,\dots,x_k) \in \Sigma_1$ und sind $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ so gilt:

$$\textit{Falls } \mathcal{N} \models \varphi[m_1,\dots,m_k], \textit{ so } \mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}},\dots,\underline{m_k}^{\mathcal{A}}]$$

Beweis:

(a) Einfache Induktion über den Aufbau von t unter Verwendung von Lemma 4.6. Details: Übung!

(b) Per Induktion über den Aufbau von $\varphi \in \Delta_0$:

- φ ist von der Form $t_1 = t_2$ oder $t_1 \leqslant t_2$: folgt direkt aus (a) und Lemma 4.6 (c).
- φ ist von der Form $\neg\psi$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$ oder $(\psi_1 \wedge \psi_2)$: folgt direkt aus der Induktionsannahme.
- φ ist von der Form $\forall y \leqslant t\, \psi$:
  Sei $t = t(x_1,\dots,x_k)$ und $\psi = \psi(x_1,\dots,x_k,y)$. Seien $n,m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $n = t^{\mathcal{N}}[m_1,\dots,m_k]$ (und wegen (a) daher auch $\underline{n}^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{A}}[\underline{m_1}^{\mathcal{A}},\dots,\underline{m_k}^{\mathcal{A}}]$). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \models \varphi[m_1,\dots,m_k] &\iff \text{f.a. } \ell \leqslant n \text{ gilt: } \mathcal{N} \models \varphi[m_1,\dots,m_k,\ell] \\
\underset{\text{Ind.annahme}}{\iff}\ & \text{f.a. } \ell \leqslant n \text{ gilt } \mathcal{A} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}},\dots,\underline{m_k}^{\mathcal{A}},\underline{\ell}^{\mathcal{A}}] \\
\underset{\text{Lemma 4.6 (b)}}{\iff}\ & \text{f.a. } a \leqslant \underline{n}^{\mathcal{A}} \text{ gilt } \mathcal{A} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}},\dots,\underline{m_k}^{\mathcal{A}},a] \\
\iff\ & \mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}},\dots,\underline{m_k}^{\mathcal{A}}].
\end{aligned}$$

- φ ist von der Form $\exists y \leqslant t\, \psi$: analog.

(c) Sei φ eine Σ_1-Formel der Form $\exists y\ \psi$, wobei $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_k, y) \in \Delta_0$. Seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ s.d. $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ s.d. $\mathcal{N} \models \psi[m_1, \ldots, m_k, n]$. Wegen $\psi \in \Delta_0$ folgt aus (b), dass $\mathcal{A} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}, \underline{n}^{\mathcal{A}}]$. Somit gilt (wegen $\varphi = \exists y\, \psi$), dass $\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}]$.

□

Folie 180

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz):
Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.Zu zeigen:
$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.
„$\Longleftarrow$" : folgt aus Lemma 4.4.
„$\Longrightarrow$" : Es gelte $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von Q.Nach Lemma 4.8 (c) gilt dann $\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}]$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt dann $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

□Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz)

4.2.2 Repräsentierbarkeit von Relationen und Funktionen

Folie 181

Als zweiten Schritt zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz benötigen wir den folgenden Begriff der **Repräsentierbarkeit** von Relationen und Funktionen.

Definition 4.9 (Repräsentierbarkeit einer Relation)**.**
Sei T eine Menge von $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ eine k-stellige Relation.

repräsentiert R in T

(a) Eine $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ **repräsentiert** R **in** T, falls für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

- Falls $(m_1, \ldots, m_k) \in R$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$
- Falls $(m_1, \ldots, m_k) \notin R$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

repräsentierbar in T

(b) R heißt **repräsentierbar in** T, wenn es eine $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel gibt, die R in T repräsentiert.

Folie 182

Definition 4.10 (Repräsentierbarkeit einer Funktion)**.**
Sei T eine Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine (totale) Funktion.

(a) Eine $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ **repräsentiert** f **in** T, wenn gilt:

repräsentiert f in T

   (1) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

      (1.1) Falls $f(m_1, \ldots, m_k) = n$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$

      (1.2) Falls $f(m_1, \ldots, m_k) \neq n$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

   (2) Für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$T \models \forall y_1 \, \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2)\big) \to y_1 = y_2 \Big)$$

Bemerkung: Falls $Q \subseteq T$, so folgt (1.2) aus (1.1) und (2). Insbesondere ist also der Graph von f repräsentierbar in T (durch die Formel φ) (Details: Übung).

Folie 183

Das nächste „Etappenziel“ zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4.11 (Repräsentierbarkeit (in Q) der berechenbaren Funktionen und entscheidbaren Relationen)**.**
Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

(a) Jede TM-berechenbare (totale) Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *ist in* Q *repräsentierbar.*

(b) Jede TM-entscheidbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *ist in* Q *repräsentierbar.*

Beweis von (b):
Wir beweisen (b) unter Verwendung von (a). Sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ entscheidbar. Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(m_1, \ldots, m_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (m_1, \ldots, m_k) \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f eine totale, TM-berechenbare Funktion. Gemäß Teil (a) von Satz 4.11 gibt es eine FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel $\varphi_f(x_1,\dots,x_k,y)$, die f in Q repräsentiert. Setze

$$\varphi_R(x_1,\dots,x_k) \ := \ \varphi_f(x_1,\dots,x_k,\underline{1})$$

Behauptung: φ_R repräsentiert R in Q.
Um dies zu zeigen, seien $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

- $$\begin{aligned}(m_1,\dots,m_k)\in R \ &\underset{\text{Wahl von } f}{\Longrightarrow} \ f(m_1,\dots,m_k)=1\\ &\underset{\varphi_f \text{ repr. } f \text{ in } Q}{\Longrightarrow} \ Q \models \varphi_f(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{1})\\ &\underset{\text{Wahl von } \varphi_R}{\Longrightarrow} \ Q \models \varphi_R(x_1,\dots,x_k)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(m_1,\dots,m_k)\notin R \ &\underset{\text{Wahl von } f}{\Longrightarrow} \ f(m_1,\dots,m_k)\neq 1\\ &\underset{\varphi_f \text{ repr. } f \text{ in } Q}{\Longrightarrow} \ Q \models \neg\varphi_f(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{1})\\ &\underset{\text{Wahl von } \varphi_R}{\Longrightarrow} \ Q \models \neg\varphi_R(x_1,\dots,x_k)\end{aligned}$$

Somit gilt: φ_R repräsentiert R in Q.
Dies beendet den Beweis von Satz 4.11 (b) unter Verwendung von Satz 4.11 (a).

$\square_{\text{(b)}}$

Um Satz 4.11 (a) zu beweisen, benutzen wir folgendes Lemma:

Folie 184

Lemma 4.12.

(a) Jede Δ_0-definierbare totale Funktion ist in Q repräsentierbar.

(b) Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine TM-berechenbare totale Funktion. Dann gibt es Δ_0-definierbare Funktionen $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1,\dots,m_k) \ = \ h(m_1,\dots,m_k,g(m_1,\dots,m_k))$$

(c) Seien $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ in Q repräsentierbar, und sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ so definiert, dass für alle $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(m_1,\dots,m_k) \ = \ h(m_1,\dots,m_k,g(m_1,\dots,m_k)).$$

Dann ist f in Q repräsentierbar.

Beachte: Satz 4.11 (a) folgt unmittelbar aus Lemma 4.12. Um den Beweis von Satz 4.11 abzuschließen, genügt es also, Lemma 4.12 zu beweisen.

Beweis von Lemma 4.12 (a):
Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch die Δ_0-Formel $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ definiert.

Zu zeigen: f ist repräsentierbar in Q.

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ die folgende FO[σ_{Ar}]-Formel:

$$\varphi(x_1, \dots, x_k, y) \;:=\; \big(\psi(x_1, \dots, x_k, y) \wedge \forall y' < y\ \neg\psi(x_1, \dots, x_k, y')\big).$$

Im Folgenden zeigen wir, dass φ die Funktion f in Q repräsentiert.
Sei dazu $\mathcal{A}$ ein beliebiges Modell von Q.

Behauptung 1.
Für alle $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) = n$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$$

Beweis von Behauptung 1:
Es gilt:

$$\begin{aligned} f(m_1, \dots, m_k) = n \;&\underset{\psi \text{ def. } f}{\Longrightarrow}\; \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n] \\ &\underset{\Sigma_1\text{-Transfersatz}}{\Longrightarrow}\; \mathcal{A} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}, \underline{n}^{\mathcal{A}}] \end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle $n' < n$:

$$\begin{aligned} f(m_1, \dots, m_k) \neq n' \;&\Longrightarrow\; \mathcal{N} \models \neg\psi[m_1, \dots, m_k, n'] \\ &\Longrightarrow\; \mathcal{A} \models \neg\psi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}, \underline{n'}^{\mathcal{A}}] \end{aligned}$$

Somit gilt gemäß Lemma 4.6 (b) und dem Substitutionslemma, dass $\mathcal{A} \models \forall y' < \underline{n}\ \neg\psi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y')$.
Somit gilt gemäß Definition von φ, dass $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

$\square_{\text{Behauptung 1}}$

Behauptung 2.

$$\mathcal{A} \models \underbrace{\forall x_1 \cdots \forall x_k \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(x_1, \dots, x_k, y_1) \wedge \varphi(x_1, \dots, x_k, y_2)\big) \to y_1 = y_2 \Big)}_{=:\chi}$$

Beweis von Behauptung 1:
Seien $a_1, \ldots, a_k, b_1, b_2 \in A$ so dass $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k, b_1]$ und $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k, b_2]$. Zu zeigen ist $b_1 = b_2$.
Wegen $\mathcal{A} \models Q$ und $\psi_{(Q9)} \in Q$ gilt dann: $b_1 \leqslant^{\mathcal{A}} b_2$ oder $b_2 \leqslant^{\mathcal{A}} b_1$. O.B.d.A gelte $b_1 \leqslant^{\mathcal{A}} b_2$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \models \varphi\,[a_1, \ldots, a_k, b_2] \\ \underset{\text{Def von } \varphi}{\Longrightarrow} \; & \mathcal{A} \models \Big(\forall y' < y \; \neg\psi(x_1, \ldots, x_k, y')\Big) \left[\frac{a_1}{x_1}, \ldots \frac{a_k}{x_k}, \frac{b_2}{y}\right] \end{aligned}$$

Außerdem gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k, b_1]$ und somit auch $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_k, b_1]$. Daraus folgt, dass $b_1 = b_2$ und daher $\mathcal{A} \models \chi$.

$\square_{\text{Behauptung 1}}$

Beachte: Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt gemäß Definition 4.10, dass die Formel φ die Funktion f in Q repräsentiert.

$\square_{\text{Lemma 4.12 (a)}}$

Beweis von Lemma 4.12 (b):
Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ TM-berechenbar. Gemäß Satz 3.21 wissen wir, dass f Σ_1-definierbar ist, d.h. es gibt eine Σ_1-Formel $\varphi_f(x_1, \ldots, x_k, y)$ der Form $\exists z\, \psi(x_1, \ldots, x_k, y, z)$ mit $\psi \in \Delta_0$, die f definiert.
Sei $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ die folgendermaßen gewählte Funktion: Für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} g(m_1, \ldots, m_k) \; := \; & \min\{p \in \mathbb{N} : \text{ es gibt } n, \ell \leqslant p \text{ s.d.} \\ & \qquad \mathcal{N} \models \psi[m_1, \ldots, m_k, n, \ell]\}. \end{aligned}$$

Offensichtlicherweise wird g durch die folgende Δ_0-Formel $\chi(x_1, \ldots, x_k, w)$ definiert:

$$\begin{aligned} \chi(x_1, \ldots, x_k, w) \; := \; & \exists y \leqslant w \, \exists z \leqslant w \Big(\\ & \psi(x_1, \ldots, x_k, y, z) \wedge \\ & \forall w' < w \; \neg\big(\exists y' \leqslant w' \; \exists z' \leqslant w' \; \psi(x_1, \ldots, x_k, y', z')\big)\Big). \end{aligned}$$

Sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ die folgendermaßen gewählte Funktion: Für alle $m_1, \ldots, m_k, p \in \mathbb{N}$ sei

$$h(m_1, \ldots, m_k, p) \; := \; \begin{cases} \min\{n \leqslant p : \text{ es gibt ein } \ell \leqslant p \text{ s.d.} \\ \quad \mathcal{N} \models \psi[m_1, \ldots, m_k, n, \ell]\}, \\ \quad \text{falls es } n, l \leqslant p \text{ mit } \mathcal{N} \models \psi[m_1, \ldots, m_k, n, \ell] \text{ gibt} \\ 0 \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion h wird durch die folgende Δ_0-Formel definiert:

$$\begin{aligned} \xi(x_1,\ldots,x_k,w,y) \ :=& \\ &\Big(\big(y=0 \ \wedge\ \neg\exists y' \leqslant w\, \exists z \leqslant w\ \psi(x_1,\ldots,x_k,y',z)\big) \ \vee \\ &\big(y \leqslant w \ \wedge\ \exists z \leqslant w\ \psi(x_1,\ldots,x_k,y,z) \ \wedge \\ &\qquad \forall y' < y\ \neg\exists z \leqslant w\ \psi(x_1,\ldots,x_k,y',z)\big)\Big) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass für alle $m_1,\ldots,m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(m_1,\ldots,m_k) \ = \ h(m_1,\ldots,m_k,g(m_1,\ldots,m_k)).$$

$\square_{\text{Lemma 4.12 (b)}}$

Beweis von Lemma 4.12 (c):
Sei $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch die Formel $\varphi_g(x_1,\ldots,x_k,y)$ und sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ durch die Formel $\varphi_h(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},y)$ in Q repräsentiert. Setze

$$\varphi(x_1,\ldots,x_k,y) \ := \ \exists z\ \big(\varphi_g(x_1,\ldots,x_k,z) \ \wedge\ \varphi_h(x_1,\ldots,x_k,z,y)\big).$$

Im Folgenden zeigen wir, dass diese Formel die Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(m_1,\ldots,m_k) = h(m_1,\ldots,m_k,g(m_1,\ldots,m_k))$ in Q repräsentiert.

Behauptung 3. Für alle $m_1,\ldots,m_k,n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1,\ldots,m_k) = n \ \Longrightarrow\ Q \models \varphi(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},\underline{n})$$

Beweis von Behauptung 3:
Sei $\ell := g(m_1,\ldots,m_k)$. Dann gilt (gemäß Wahl von φ_g,φ_h,f):

$$Q \models \varphi_g(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},\underline{\ell}) \text{ und } Q \models \varphi_h(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},\underline{\ell},\underline{n}).$$

Somit $Q \models \exists z\big(\varphi_g(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},z) \ \wedge\ \varphi_h(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},z,\underline{n})\big)$, d.h. $Q \models \varphi(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},\underline{n})$.

$\square_{\text{Behauptung 3}}$

Behauptung 4. Für alle $m_1,\ldots,m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$Q \models \forall y_1 \forall y_2\Big(\big(\varphi(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},y_1) \ \wedge\ \varphi(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},y_2)\big) \to y_1 = y_2\Big).$$

Beweis von Behauptung 4:
Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von Q und seien $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist

$$\mathcal{A} \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_1) \ \land\ \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_2)\big) \to y_1 = y_2 \Big).$$

Seien dafür $b_1, b_2 \in A$ s.d. $\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}, b_1]$ und $\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}, b_2]$ (zu zeigen ist $b_1 = b_2$). Gemäß Definition von φ gibt es daher $c_1, c_2 \in A$ s.d. gilt

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_1) \ \land\ \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_1, b_1) \text{ und} \\ &\mathcal{A} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_2) \ \land\ \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_2, b_2). \end{aligned} \qquad (*)$$

Da φ_g die Funktion g in Q repräsentiert, gilt $c_1 = c_2$. Für $n := g(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}$ folgt außerdem $\mathcal{A} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$, und somit gilt (da φ_g die Funktion g in Q repräsentiert): $\underline{n}^{\mathcal{A}} = c_1 = c_2$.
Mit $(*)$ folgt daher, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n}, b_1) \text{ und } \mathcal{A} \models \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n}, b_2).$$

Da φ_h die Funktion h in Q repräsentiert, folgt, dass $b_1 = b_2$.

$\square_{\text{Behauptung 4}}$

Aus Behauptung 3 und 4 folgt unmittelbar, dass φ die Funktion f in Q repräsentiert.

$\square_{\text{Lemma 4.12 (c)}}$

4.3 Der Fixpunktsatz und die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe

Zur Erinnerung: In Bemerkung 3.9 hatten wir jeder $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel φ eine natürliche Zahl $n_\varphi := [\langle\varphi\rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ zugeordnet (die sogenannte „Gödelnummer“ von φ).

Folie 185

Satz 4.13 (Der Fixpunktsatz)**.**
Sei T eine σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es für jede $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel $\varphi(y)$ einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz χ, so dass gilt

$$T \models \big(\chi \ \leftrightarrow\ \varphi(\underline{n_\chi})\big)$$

(D.h.: Für jede Formel $\varphi(y)$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einen Satz χ, s.d. gilt:

- *n ist die Gödelnummer von χ, und*
- *in jedem Modell $\mathcal{A}$ von T gibt die Formel $\varphi(\underline{n})$ an, ob der Satz χ erfüllt ist oder nicht.)*

Beachte: Anschaulich besagt χ „Die Eigenschaft φ trifft für mich zu".

Beweis:
Betrachte die folgendermaßen definierte totale Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (für $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$):

$$f(m_1, m_2) := \begin{cases} n_{\psi(\underline{m_2})} & \text{falls es eine FO}[\sigma_{\text{Ar}}]\text{-Formel } \psi(x) \text{ gibt, so dass} \\ & m_1 \text{ die Gödelnummer der Formel } \psi(x) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: f ist berechenbar (da unsere Kodierung die Annahme 3.1 erfüllt).

Nach Satz 4.11 ist f damit in Q repräsentierbar. Wegen $Q \subseteq T$ ist f daher auch in T repräsentierbar. Sei $\xi_f(x_1, x_2, y)$ eine FO[σ_{Ar}]-Formel, die f in T repräsentiert.

Beachte: Ist $m \in \mathbb{N}$ die Gödelnummer einer Formel $\psi(x)$, so gilt: $f(m, m)$ ist die Gödelnummer der Formel $\psi(\underline{m})$.

Betrachte nun im Speziellen die Formel

$$\psi(x) \;\; := \;\; \forall y \left(\xi_f(x, x, y) \to \varphi(y) \right).$$

Sei m die Gödelnummer der Formel $\psi(x)$ und $\chi := \psi(\underline{m})$.

Beachte:

- $\chi = \forall y \big(\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y) \to \varphi(y) \big)$
- $f(m, m) = n_\chi$

Der Satz χ formalisiert die Aussage:

„Die Formel $\varphi(y)$ ist erfüllt, wenn die Variable y mit der Gödelnummer der Formel χ belegt wird".

Im Folgenden zeigen wir, dass

$$T \models (\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi})),$$

d.h. in jedem Modell $\mathcal{A}$ von T gilt $A \models \chi \iff \mathcal{A} \models \varphi(\underline{n_\chi})$. Dazu gehen wir in 3 Schritten vor.

Behauptung 1. $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$

Beweis von Behauptung 1:
Wir wissen $f(m, m) = n_\chi$. Da die Formel ξ_f die Funktion f in T repräsentiert gilt: $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$.

$\square_{\text{Behauptung 1}}$

Behauptung 2. $T \models (\chi \to \varphi(\underline{n_\chi}))$

Beweis von Behauptung 2:
Sei $\mathcal{A}$ ein beliebiges Modell von T für das gilt $A \models \chi$. Wir müssen zeigen, dass dann auch $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{n_\chi})$. Wegen $\mathcal{A} \models T$ und Behauptung 1 gilt $\mathcal{A} \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$. Wegen $\mathcal{A} \models \chi$ gilt gemäß unserer Wahl der Formel χ: $\mathcal{A} \models (\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi}) \to \varphi(n_\chi))$. Zusammengenommen folgt daraus $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{n_\chi})$.

$\square_{\text{Behauptung 2}}$

Behauptung 3. $T \models (\varphi(\underline{n_\chi}) \to \chi)$

Beweis von Behauptung 3:
Sei $\mathcal{A}$ ein beliebiges Modell von T, für das gilt $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{n_\chi})$. Zu zeigen ist $\mathcal{A} \models \chi$. Wegen Behauptung 1 gilt $\mathcal{A} \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$. Da ξ_f die Funktion f in T repräsentiert, gilt außerdem

$$\mathcal{A} \models \forall y_1 \forall y_2 \ \big((\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y_1) \ \wedge \ \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y_2)) \to y_1 = y_2 \big).$$

Damit gilt

$$\mathcal{A} \models \forall y \big(\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y) \to y = \underline{n_\chi} \big). \tag{1}$$

Außerdem gilt: $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{n_\chi})$. (2)
Aus (1) und (2) folgt

$$A \models \underbrace{\forall y (\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y) \to \varphi(y))}_{\chi}.$$

D.h. $\mathcal{A} \models \chi$.

$\square_{\text{Behauptung 3}}$

Aus Behauptung 2 und 3 folgt, dass

$$T \models \big(\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi})\big).$$

$\square$

Folie 186

Als einfache Folgerung des Fixpunktsatzes erhalten wir folgendes:

Satz 4.14 („Unmöglichkeit der Selbstrepräsentation“)**.**
Eine widerspruchfreie Theorie, die Q erweitert, ist ***nicht*** *in sich selbst repräsentierbar.*

Präzise: Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann ist die Relation

$$R_T \ := \ \{n_\xi \ : \ \xi \in T\} \ \subseteq \mathbb{N}$$

(d.h. die Menge aller Gödelnummern von Sätzen in T) **nicht** in T repräsentierbar.

Beweis: Durch Widerspruch.
Angenommen, $\psi(y)$ ist eine FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel, die die Relation $R_T := \{n_\xi \,:\, \xi \in T\}$ in T repräsentiert. Sei $\varphi(y) := \neg\psi(y)$.
Gemäß Fixpunktsatz (Satz 4.13) gibt es einen FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz χ s.d. $T \models (\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi}))$.
Dann gilt für jedes Modell $\mathcal{A}$ von T:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \chi \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models \varphi(\underline{n_\chi}) \\
&\underset{\varphi(y)=\neg\psi(y)}{\iff} \quad \mathcal{A} \models \neg\psi(\underline{n_\chi}) \\
&\underset{\psi(y)\text{ repr. } R_T \text{ in } T}{\iff} \quad n_\chi \notin R_T \\
&\underset{R_T=\{n_\xi:\xi\in T\}}{\iff} \quad \chi \notin T
\end{aligned}$$

Beachte, dass Modelle von T existieren, da T widerspruchsfrei ist.
Angenommen, **jedes** Modell von T erfüllt χ. Dann folgt χ aus T und da T eine Theorie ist, ist dann $\chi \in T$. $\lightning$
Somit gibt es ein Modell $\mathcal{A}'$ von T mit $\mathcal{A}' \not\models \chi$. Da $\mathcal{A} \models T$ bedeutet dies $\chi \notin T$. Wir haben aber gerade gesehen, dass dies äquivalent zu $\mathcal{A}' \models \chi$ ist.
$\lightning$

□

Folie 187

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.14 (für $T := \mathrm{Th}(\mathcal{N})$) erhalten wir den folgenden Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der „Wahrheit“. (Einen FO[σ_{Ar}]-Satz ξ bezeichnen wir hierbei als **„wahr“**, wenn er vom Standardmodell der Arithmetik ($\mathcal{N}$) erfüllt wird.)

Satz 4.15 (Der Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit)**.**
Die Menge aller „wahren“ arithmetischen Sätze ist nicht arithmetisch axiomatisierbar.

Präzise: Es gibt keine FO[σ_{Ar}]-Formel $\varphi(y)$, so dass für alle FO[σ_{Ar}]-Sätze ξ gilt:

$$\mathcal{N} \models \varphi(\underline{n_\xi}) \iff \mathcal{N} \models \xi.$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 4.14 mit $T := \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

□

Folie 188

Satz 4.16 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)**.**
Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar. Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisierbar).

Beweis:
Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Angenommen, T ist entscheidbar, d.h. die Relation

$$R_T := \{n_\xi : \xi \in T\} \subseteq \mathbb{N}$$

ist entscheidbar.
Gemäß Satz 4.11 (b) ist R_T dann in Q repräsentierbar.Wegen $Q \subseteq T$ ist R_T dann auch in T repräsentierbar.$\lightning_{\text{zu Satz 4.14}}$

□

Folie 189

Als einfache Folgerung aus Satz 4.16 und Korollar 3.3 erhalten wir

Satz 4.17. *Die Menge aller allgemeingültigen* $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$*-Sätze ist rekursiv aufzählbar, aber **nicht** entscheidbar.*

Beweis:
Die rekursive Aufzählbarkeit folgt aus Korollar 3.3
Angenommen, die Menge aller allgemeingültigen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätze wäre entscheidbar. Wir zeigen, dass dann auch Q entscheidbar wäre und erhalten damit einen Widerspruch zu Satz 4.16.

Sei $\psi_Q := \bigwedge_{i=1}^{9} \psi_{(Qi)}$ die Konjunktion der $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätze $\psi_{(Q1)}, \ldots, \psi_{(Q9)}$, die gemäß Definition 4.3 die minimale Arithmetik Q axiomatisieren. Dann gilt für jeden $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz ξ:

$$\begin{aligned} \xi \in Q &\iff \psi_Q \models \xi \\ &\iff (\psi_Q \to \xi) \text{ ist allgemeingültig.} \end{aligned}$$

Somit wäre Q entscheidbar: Indem man bei Eingabe von ξ den Satz $(\psi_Q \to \xi)$ bildet und testet, ob $(\psi_Q \to \xi)$ allgemeingültig ist, kann man testen, ob $\xi \in Q$ ist. $\lightning_{\text{zu Satz 4.16}}$

$\square$

Folgerung 4.17'. *Die Menge aller **erfüllbaren*** $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$*-Sätze ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*

Beweis: Übung!

$\square$

4.4 Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Folie 190

Gödels erster Unvollständigkeitssatz folgt unmittelbar aus Satz 4.16 und Korollar 4.2 (b).

Satz 4.18 (Gödels erster Unvollständigkeitssatz)**.**
Jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}*-Theorie* T *mit* $Q \subseteq T$ *ist unvollständig.*

Beweis:
Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Angenommen, T ist vollständig. Gemäß Korollar 4.2 ist T dann entscheidbar. $\lightning_{\text{zu Satz 4.16}}$

□

Folie 191

Bezüglich des ersten Gödels Unvollständigkeitssatzes können wir sogar explizit eine Formel φ_T angeben, die unabhängig von T ist, d.h. für die weder $T \models \varphi_T$ noch $T \models \neg\varphi_T$ gilt.

Um eine solche Formel φ_T zu konstruieren, betrachten wir im Folgenden Beweise im Sequenzenkalkül und stellen fest, dass die Beweisbarkeit einer Aussage durch eine Σ_1-Formel definiert werden kann:

Lemma 4.19 (Existenz von „Beweisbarkeitsformeln“).
Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gibt es eine Σ_1-Formel $\text{Bew}_T(x)$ so dass für jeden $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz φ gilt:

$$T \models \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi].$$

Folie 192

Beweis:

$$\begin{aligned} &T \text{ effektiv axiomatisierbar} \overset{\text{Kor. 4.2}}{\Longrightarrow} T \text{ r.e.} \\ &\Longrightarrow \{n_\varphi : \varphi \text{ FO}[\sigma_{\text{Ar}}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi\} \text{ r.e.} \\ &\overset{\text{Satz 3.21}}{\Longrightarrow} \{n_\varphi : \varphi \text{ FO}[\sigma_{\text{Ar}}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi\} \text{ ist } \Sigma_1\text{-definierbar,} \end{aligned}$$

d.h. es gibt eine Σ_1-Formel $\text{Bew}_T(x)$ s.d. f.a. $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätze φ gilt

$$\mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi] \iff T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} T \models \varphi.$$

□

Folie 193

Notation 4.20 („Beweisbarkeitsformeln“).
Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T sei im Folgenden $\text{Bew}_T(x)$ eine fest gewählte Σ_1-Formel, so dass für alle $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätze φ gilt

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi].$$

Aus Lemma 4.19 und dem Σ_1-Transfersatz (Satz 4.5) folgt unmittelbar:

Korollar 4.21. *Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gilt für jeden* $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Satz φ:*

(a) $T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff Q \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$.

(b) Wenn $Q \subseteq T$, dann gilt:

$$\textit{Falls } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi, \textit{ so } T \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}).$$

Beweis:
(b) folgt direkt aus (a).
Zu (a):

$$\begin{aligned} T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \quad & \underset{\text{Notation 4.20}}{\iff} \quad \mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi] \\ & \underset{\Sigma_1\text{-Transfersatz}}{\iff} \quad Q \models \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \\ & \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \quad Q \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \end{aligned}$$

□

Folie 194

Lemma 4.22 (Existenz von „Gödelsätzen“)**.**
Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es einen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Satz χ mit*

$$T \models \big(\chi \leftrightarrow \neg\text{Bew}_T(\underline{n_\chi})\big) \qquad (*)$$

(Anschaulich besagt χ folgendes: „ich bin nicht aus T beweisbar“).

Beweis: Folgt direkt aus dem Fixpunktsatz (Satz 4.13) für $\varphi(y) := \neg\text{Bew}_T(y)$.

□

Notation 4.23. Ein Satz χ der die Eigenschaft $(*)$ besitzt, heißt **Gödelsatz für** T.

Gödelsatz für T

Folie 195

Gödelsätze liefern konkrete Beispiele für die Unvollständigkeit von T (vgl. Gödels ersten Unvollständigkeitssatz).

Satz 4.24 (Präzisierung von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz)**.**
Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T \subseteq \mathrm{Th}\,(\mathcal{N})$, und sei χ ein Gödelsatz für T.
Dann ist χ unabhängig von T, d.h. es gilt weder $T \models \chi$ noch $T \models \neg\chi$.

Beweis:
Beachte: $T \subseteq \mathrm{Th}\,(\mathcal{N}) \ \Rightarrow\ \mathcal{N} \models T \ \Rightarrow\ T$ ist erfüllbar, also widerspruchsfrei.

<u>Schritt 1:</u> Angenommen, $T \models \chi$.
Gemäß der Definition des Begriffs „Gödelsatz“ gilt dann auch
$T \models \neg\mathrm{Bew}_T(\overline{n_\chi})$. Wegen $\mathcal{N} \models T$ gilt dann: $\mathcal{N} \models \neg\mathrm{Bew}_T(\overline{n_\chi})$, d.h.
$\mathcal{N} \not\models \mathrm{Bew}_T[\overline{n_\chi}]$. Gemäß Notation 4.20 also $T \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \chi$, d.h. $T \not\models \chi$. ↯

<u>Schritt 2:</u> Angenommen, $T \models \neg\chi$.
Gemäß der Definition des Begriffs „Gödelsatz“ gilt dann auch
$T \models \mathrm{Bew}_T(\overline{n_\chi})$. Wegen $\mathcal{N} \models T$ gilt dann: $\mathcal{N} \models \mathrm{Bew}_T(\overline{n_\chi})$, d.h.
$\mathcal{N} \not\models \mathrm{Bew}_T[\overline{n_\chi}]$. Gemäß Notation 4.20 also $T \vdash_{\mathfrak{K}} \chi$, d.h. $T \models \chi$. ↯

$\square$

4.5 Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

<u>Das Hilbertsche Programm</u>

Ziel:	Rechtfertigung der Korrektheit der modernen *abstrakten Mathematik* (mit all ihren Beweistechniken)
Methode:	durch eine Reduktion auf eine „unanfechtbare“ *finite Mathematik*

Etwas genauer:

- *„Abstrakte Mathematik“*
  - beliebige Aussagen
  - abstrakte Beweistechniken
  - Formalisierung: eine beliebige Theorie A
- *„Finite Mathematik“*
  - nur „reale Aussagen“, d.h. Aussagen der Form $\forall x\, \varphi(x)$ mit $\varphi(x) \in \Delta_0$

  - Notation: Eine „reale Aussage“ $\forall x\, \varphi(x)$ heißt **wahr**, wenn sie im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik gilt
  - „finite“ Beweismethoden (etwa: Beweise im **Sequenzenkalkül**)
  - Formalisierung: eine geeignete Theorie F mit $Q \subseteq F \subseteq A$

Zur Erinnerung: Gemäß Vollständigkeitssatz gilt für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$:

$$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$$

d.h. im Sequenzenkalkül lassen sich genau diejenigen Aussagen beweisen, die semantisch folgen.

- Möglicherweise kann A eine Theorie über einer größeren Signatur σ als σ_{Ar} sein, damit $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln auch über andere mathematische Objekte als natürliche Zahlen sprechen können.
- Beachte: Formale Beweise in der Theorie A sind „finite Objekte“, über die man mittels einer geeigneten Kodierung in der Theorie F sprechen kann.

Ziele von Hilberts Programm

Ziel 1: Finiter Beweis der Korrektheit der abstrakten Mathematik (Formal: ein Beweis in F, dass alle in A beweisbaren realen Aussagen wahr sind)

Ziel 2: Finiter Beweis der Widerspruchsfreiheit der abstrakten Mathematik (Formal: ein Beweis in F, dass A widerspruchsfrei ist)

Behauptung: Die beiden Ziele sind äquivalent, d.h. A ist widerspruchsfrei $\Leftrightarrow$ alle in A beweisbaren realen Aussagen sind wahr.

Beweis:
„$\Longleftarrow$“ : Angenommen, A wäre **nicht** widerspruchsfrei (also **nicht** erfüllbar). Dann sind **alle** Aussagen aus A beweisbar. Somit gibt es reale Aussagen, die in A beweisbar sind, aber nicht wahr sind.
„$\Longrightarrow$“ : A sei widerspruchsfrei. Angenommen, es gibt eine reale Aussage der Form $\forall x\, \psi(x)$ (mit $\psi(x) \in \Delta_0$), s.d.

$$A \models \forall x\, \psi(x),$$

die nicht wahr ist, d.h. $\mathcal{N} \not\models \forall x\, \psi(x)$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{N} \models \neg\psi(\underline{n})$. Wegen $\neg\psi(x) \in \Delta_0$ und $Q \subseteq A$ liefert der Σ_1-Transfersatz (Satz 4.5), dass $A \models \neg\psi(\underline{n})$. Wegen $A \models \forall x\, \psi(x)$, gilt aber auch: $A \models \psi(\underline{n})$.
$\lightning$ zu „A ist widerspruchsfrei“

□

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt, dass Ziel 2 nicht erreichbar ist, d.h. dass es keinen Beweis in F gibt, der die Widerspruchsfreiheit von A nachweist.

Um dies zu beweisen, nutzen wir die Beweisbarkeitsformel $\mathrm{Bew}_T(x)$ und konstruieren eine Formel Wfrei_T, die besagt, dass die Theorie T widerspruchsfrei ist:

Folie 196

Definition 4.25 (Konsistenzsatz Wfrei_T)**.**
Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Der **Konsistenzsatz für** T ist der $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz

Konsistenzsatz für T

$$\mathrm{Wfrei}_T \ := \ \neg\mathrm{Bew}_T(\underline{n_{0=1}}).$$

Lemma 4.26. *Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ gilt*

$$T \text{ ist widerspruchsfrei} \iff \mathcal{N} \models \mathrm{Wfrei}_T.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& T \text{ widerspruchsfrei} \\
\iff\ & T \text{ nicht widerspruchsvoll} \\
\iff\ & T \nvdash_{\mathfrak{K}} 0=1 \ (\text{da } T \supseteq Q \text{ und } Q \vdash_{\mathfrak{K}} \neg 0=1) \\
\iff\ & \mathcal{N} \not\models \mathrm{Bew}_T(\underline{n_{0=1}}) \\
\iff\ & \mathcal{N} \models \neg\mathrm{Bew}_T(\underline{n_{0=1}})
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Man beachte, dass der Satz Wfrei_T äquivalent zu einem Satz der Form $\forall x\, \varphi(x)$ (mit $\varphi(x) \in \Delta_0$) ist.
Somit ist der Satz Wfrei_T eine „reale Aussage“ im Sinne des Hilbertschen Programms.

Folie 197

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz besagt, dass $T \nvdash_{\mathfrak{K}} \mathrm{Wfrei}_T$, sofern T eine effektiv axiomatisierbare, widerspruchsfreie Erweiterung der sogenannten **Peano-Arithmetik** ist.

Definition 4.27 (Die Peano-Arithmetik PA)**.**
Die Peano-Arithmetik PA ist die σ_{Ar}-Theorie, die von den Axiomen $\psi_{(Q1)}, \ldots, \psi_{(Q9)}$ der Theorie Q sowie von den folgenden **Induktionsaxiomen** $\psi_{(Ind,\varphi)}$ axiomatisiert wird:
Für jede FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel $\varphi(x)$ sei

$$\psi_{(Ind,\varphi)} \;:=\; \Big(\big(\underbrace{\varphi(\underline{0})}_{\text{„Induktionsanfang“}} \;\wedge\; \underbrace{\forall x\big(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)\big)\big)}_{\text{„Induktionsschritt“}} \rightarrow \forall x\, \varphi(x)\Big)$$

Klar:

- $\mathcal{N} \models PA$
- $Q \subseteq PA \subseteq \text{Th}(\mathcal{N})$
- PA ist effektiv axiomatisierbar.

Folie 198

Wir können nun Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz formulieren:

Satz 4.28 (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz)**.**
Für jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $PA \subseteq T$ gilt:

$$T \not\vdash_{\mathfrak{K}} \text{Wfrei}_T$$

(d.h. die Widerspruchsfreiheit von T kann nicht mit den in T verfügbaren Mitteln bewiesen werden).

Satz 4.28 lässt sich sehr leicht beweisen, wenn man den folgenden **Satz von Löb** verwendet:

Satz 4.29 (Der Satz von Löb)**.**
Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$. Dann gilt für jeden FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Satz φ:*

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{K}} (\text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \rightarrow \varphi).$$

Beachte:

- Die Richtung „$\Longrightarrow$“ : gilt trivialerweise. Hinweise zum Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ : werden gleich noch gegeben.

- Aus Korollar 4.21 wissen wir bereits, dass gilt

$$\text{Falls } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi, \text{ so } T \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$$

Beweis von Satz 4.28 unter Verwendung des Satzes von Löb:
Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$. Zu zeigen ist $T \not\vdash \text{Wfrei}_T$.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $T \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Wfrei}_T$. Gemäß Definition 4.25 gilt:

$$\text{Wfrei}_T \underset{\text{Def}}{=} \neg\text{Bew}_T(\underline{n_{0=1}}).$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
&T \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Wfrei}_T\\
\Longrightarrow\ &T \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\text{Bew}_T(\underline{n_{0=1}})\\
\Longrightarrow\ &\text{für jeden FO}[\sigma_{\text{Ar}}]\text{-Satz } \varphi \text{ gilt: } T \vdash_{\mathfrak{K}} (\text{Bew}_T(\underline{n_{0=1}}) \to \varphi)\\
\Longrightarrow\ &\text{insbesondere gilt für } \varphi\ = 0 = 1:\ T \vdash_{\mathfrak{K}} (\text{Bew}_T(\underline{n_{0=1}}) \to 0 = 1)\\
\Longrightarrow\ &\text{Aus dem Satz von Löb fogt, dass } T \vdash_{\mathfrak{K}} 0 = 1
\end{aligned}$$

Wegen $T \supseteq PA \supseteq Q$ gilt aber: $T \vdash_{\mathfrak{K}} \neg 0 = 1$. Somit gilt: T ist widerspruchsvoll. ↯

☐Satz 4.28 unter Verwendung des Satzes von Löb

Folie 199

Um den Satz von Löb zu beweisen, verwendet man folgendes Lemma:

Lemma 4.30. *Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$. Dann gilt für alle* FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Sätze φ und ψ:*

(a) Falls $T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so $T \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$.

(b) $T \vdash_{\mathfrak{K}} \Big(\text{Bew}_T(\underline{n_{\varphi\to\psi}}) \to \big(\text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \text{Bew}_T(\underline{\psi})\big)\Big)$.

(c) $T \vdash_{\mathfrak{K}} \Big(\text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \text{Bew}_T(\underline{n_{\text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})}})\Big)$.

Einige Anmerkungen zu Lemma 4.30:
Aussage (a) haben wir bereits in Korollar 4.21 nachgewiesen. Die Beweise der Aussagen (b) und (c) sind „inhaltlich“ nicht besondern schwierig, aber sehr aufwändig.

Zum besseren Verständnis der Aussage von Lemma 4.30 beachte man, dass Aussage (b) besagt, dass eine Formalisierung der Modus Ponens Regel

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} (\varphi \to \psi) \implies (T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \Rightarrow T \vdash_{\mathfrak{K}} \psi) \qquad (*)$$

in der Theorie T beweisbar ist.
Analog besagt Aussage (c), dass eine Formalisierung der Regel

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \implies T \vdash_{\mathfrak{K}} \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$$

(d.h. eine Formalisierung der Aussage (a)) in der Theorie T beweisbar ist.

Die Peano-Arithmetik ist stark genug, um die „normale“, elementare Mathematik formal nachzuvollziehen - dazu zählt auch der Inhalt dieser Vorlesung. Insbesondere lässt sich in PA auch der Beweis der Korrektheit der Modus Ponens Regel $(*)$ sowie der Beweis von Aussage (a) (d.h. Korollar 4.21 (b) in PA formalisieren. Dies liefert dann die Aussagen (b) und (c) von Lemma 4.30.
(Einen formalen Beweis von Lemma 4.30 werden wir hier nicht geben.)

Unter Verwendung von Lemma 4.30 lässt sich der Satz von Löb (Satz 4.29) folgendermaßen beweisen:

Beweis von Satz 4.29 unter Verwendung von Lemma 4.30:
Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$ und sei φ beliebiger $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz.

Zu zeigen: $T \vdash_{\mathfrak{K}} \iff T \vdash_{\mathfrak{K}} (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi)$

„$\Longrightarrow$“ : folgt leicht unter Verwendung des Vollständigkeitssatzes, denn:

$$\begin{aligned} T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi &\implies T \models \varphi \\ &\implies \text{f.a. } \psi \text{ gilt: } T \models (\psi \to \varphi) \\ &\implies \text{insbes. für } \psi := \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \text{ gilt: } T \models (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi) \\ &\implies T \vdash_{\mathfrak{K}} (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi) \end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“ : Laut Voraussetzung gilt

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi) \qquad (*_1)$$

Zu zeigen: $T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$

Eine Anwendung des Fixpunktsatzes (Satz 4.13) auf die Formel $(\mathrm{Bew}_T(y) \to \varphi)$ liefert einen „Fixpunkt“ χ, d.h. einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz χ, s.d.

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \big(\chi \leftrightarrow (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)\big) \qquad (*_2)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
& T \vdash_{\mathfrak{K}} \big(\chi \to (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)\big)\\
\underset{\text{Lemma 4.30 (a)}}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} \mathrm{Bew}_T\big(\underline{n_{(\chi\to(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})\to\varphi))}}\big)\\
\underset{\substack{\text{Lemma 4.30 (b)}\\ \text{und Vollst.satz}}}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_{(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})\to\varphi)}}))\\
\underset{\text{Lemma 4.30 (b)}}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_{\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})}}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}))) \qquad (*_3)
\end{aligned}$$

Wegen Lemma 4.30 (c) gilt:

$$\begin{aligned}
& T \vdash_{\mathfrak{K}} \Big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_{\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})}})\Big)\\
\underset{(*_3)\text{ und Vollst.satz}}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} \Big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})\Big)\\
\underset{(*_1)}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} \Big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi\Big) \qquad (*_4)\\
\underset{(*_2)}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} \chi\\
\underset{\text{Lemma 4.30 (a)}}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \qquad (*_5)\\
\underset{(*_5),\,(*_4),\ \text{Vollst.satz}}{\Longrightarrow}\quad & T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi.
\end{aligned}$$

☐Satz 4.29 unter Verwendung von Lemma 4.30

4.6 Literaturhinweise

Zur weiterführenden Lektüre werden das Kapitel 10 in [EFT98], sowie die Kapitel 15-18 aus [BBJ07] empfohlen. Eine ausführliche Erklärung des im Beweis des Satzes von Löb verwendeten Arguments findet man auf den Seiten 235-238 in [BBJ07].

4.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1

Sei $\mathcal{Z}$ die σ_{Ar}-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und Konstanten $0^{\mathcal{Z}} = 0$ und

$1^{\mathcal{Z}} = 1$, für die $\leqslant^{\mathcal{Z}}$, $+^{\mathcal{Z}}$ und $\cdot^{\mathcal{Z}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind.
Zeigen Sie: $\text{Th}(\mathcal{Z})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4.2
Zeigen Sie, dass in Definition 4.10 („Repräsentierbarkeit einer Funktion“) die Bedingung (1.2) bereits aus den Bedingungen (1.1) und (2) folgt, sofern $T \supseteq Q$ ist. D.h.:

Sei $T \supseteq Q$ eine Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätzen, sei $k \geqslant 1$, sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion, und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ eine $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel, so dass gilt:

(1.1) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \ldots, m_k) = n$ gilt:
$T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \ \forall y_1 \forall y_2 \ \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \land \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2)\big) \to y_1{=}y_2 \Big).$$

Zeigen Sie, dass dann auch Folgendes gilt:

(1.2) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \ldots, m_k) \neq n$ gilt:
$T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

Frage: An welcher Stelle benutzt Ihr Beweis, dass $T \supseteq Q$ ist?

Aufgabe 4.3
Arbeiten Sie den Beweis zu Satz 4.15 (Der Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit) im Detail aus.

Aufgabe 4.4
Gilt auch die folgende Variante von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz?

> *Jede σ_{Ar}-Theorie T, für die gilt*
>
> *(1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar)*
>
> *(2) T besitzt ein semi-entscheidbares Axiomensystem und*
>
> *(3) $T \supseteq Q$*
>
> *ist unvollständig (d.h. es gibt einen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz φ, so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt).*

Falls Ihre Antwort „ja“ ist, so beweisen Sie, dass Sie Recht haben; falls Ihre Antwort „nein“ ist, so zeigen Sie auf, welche Probleme entstehen, wenn man versucht, den in der Vorlesung behandelten Beweis von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz auf die in dieser Aufgabe formulierte Variante zu übertragen.

Literaturverzeichnis

[BBJ07] G.S. Boolos, J.P. Burgess, and R.C. Jeffrey. *Computability and Logic*. Cambridge University Press, 5. edition, 2007.

[DPPD09] A. Doxiaidis, C. H. Papadimitriou, A. Papadatos, and A. Di Donna. *Logicomix: An Epic Search for Truth*. Bloomsbury USA, 2009. Siehe `http://www.logicomix.com/en/`.

[EFT98] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas. *Einführung in die Mathematische Logik*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. edition, 1998.

[HHI+07] Joseph Y. Halpern, Robert Harper, Neil Immerman, Phokion G. Kolaitis, Moshe Y. Vardi, and Victor Vianu. On the unusual effectiveness of logic in computer science. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7(2):S. 213–236, Juni 2007. URL: `http://www.math.ucla.edu/%7Easl/bsl/0702/0702-003.ps`.

[Lib04] L. Libkin. *Elements of Finite Model Theory*. Springer-Verlag, 2004.

[Ott11] Martin Otto. Model theoretic methods for fragments of fo and special classes of (finite) structures. In C. Steinhorn J. Esparza, C. Michaux, editor, *Finite and Algorithmic Model Theory*, volume 379 of *LMS Lecture Notes Series*, pages 271–341. Cambridge University Press, 2011. Eine Vorabversion ist verfügbar unter http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~otto/papers/durham.ps.

[Sch07] Thomas Schwentick. *Logik für Informatiker, Skript zur Vorlesung.* Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2007.

[Sch16a] Nicole Schweikardt. *Einführung in die Datenbanktheorie, Skript-Fragmente zur Vorlesung.* Institut für Informatik, Humboldt-Universität zu Berlin, Version vom 10. Februar 2016, 2016. Siehe https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS15-16/DBTheorie/.

[Sch16b] Nicole Schweikardt. *Logik in der Informatik, Skript zur Vorlesung.* Institut für Informatik, Humboldt-Universität zu Berlin, Version vom 9. Februar 2016, 2016. Siehe https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS15-16/Logik/.