Vorlesung
Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Lehrstuhl Theoretische Informatik / Logik in der Informatik
Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Kapitel 0:

Einleitung

Abschnitt 0.1:
Einführung ins Thema

Logik als "Fundament der Mathematik"

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Ansatz: Rückführung der Mathematik auf **Arithmetik und Mengenlehre**

Logik als "Fundament der Mathematik"

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Ansatz: Rückführung der Mathematik auf **Arithmetik und Mengenlehre**

Zwei Kernfragen:

1. Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?
2. Gibt es ein Verfahren, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist?

Eine andere Formulierung des **Entscheidungsproblems** (2) ist das **Allgemeingültigkeitsproblem** — hier für die Logik erster Stufe:

Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe

Eingabe: Eine Formel φ der Logik erster Stufe

Frage: Gilt für alle zu φ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt φ?

Eine andere Formulierung des **Entscheidungsproblems** (2) ist das **Allgemeingültigkeitsproblem** — hier für die Logik erster Stufe:

> Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe
>
> *Eingabe:* Eine Formel φ der Logik erster Stufe
>
> *Frage:* Gilt für alle zu φ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt φ?

Beispiel

Sei φ die Formel

$$\begin{aligned}\forall x\, \exists y\, \exists z\, \Big(\quad & x \leqslant y \ \wedge\ z = y+1+1 \ \wedge \\ & \forall u\, \forall v\, \Big(\big(u \cdot v = y \ \vee\ u \cdot v = z\big) \ \to\ \big(u = 1 \ \vee\ v = 1\big)\Big)\Big).\end{aligned}$$

Eine andere Formulierung des **Entscheidungsproblems** (2) ist das **Allgemeingültigkeitsproblem** — hier für die Logik erster Stufe:

> Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe
>
> *Eingabe:* Eine Formel φ der Logik erster Stufe
>
> *Frage:* Gilt für alle zu φ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt φ?

Beispiel

Sei φ die Formel

$$\forall x\, \exists y\, \exists z \Big(\quad x \leqslant y \ \wedge \ z = y + 1 + 1 \ \wedge \\ \forall u \forall v \Big(\big(u \cdot v = y \ \vee \ u \cdot v = z \big) \ \rightarrow \ \big(u = 1 \ \vee \ v = 1 \big) \Big) \Big).$$

Beachte

φ besagt “es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge”.

Zwei “Spielverderber”:

1. **Kurt Gödel (1931)**
   - $+$: jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (**Vollständigkeitssatz**)
   - $-$: in der Arithmetik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind (**Unvollständigkeitssatz**)
   - $\Rightarrow$ Hilberts (1) funktioniert nicht!

Zwei “Spielverderber”:

1. **Kurt Gödel (1931)**
   - $+$: jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (**Vollständigkeitssatz**)
   - $-$: in der Arithmetik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind (**Unvollständigkeitssatz**)
   - $\Rightarrow$ Hilberts (1) funktioniert nicht!
2. **Alan Turing (1936)**
   - $+$: Der Begriff “automatisch entscheiden” lässt sich einfach und sauber definieren (**Turingmaschine**)
   - $-$: Für die Arithmetik gibt es kein automatisches Verfahren — sie ist unentscheidbar
   - $\Rightarrow$ Hilberts (2) funktioniert nicht!

Logik und Mathematik: Geschichte

um 325 v. Chr.:	• Aristoteles: Syllogismen • Euklid: Versuch einer Axiomatisierung der Geometrie
um 1700:	Leibniz formuliert das Ziel einer universellen Sprache zur Formulierung aller mathematischen Aussagen und eines Kalküls zur Herleitung aller wahren Aussagen.
um 1850:	Axiomatisierung der Analysis
1854:	Boole: Formalisierung der Aussagenlogik
1879:	Frege: Formalisierung der Logik erster Stufe
um 1880:	Cantorsche Mengenlehre, Rückführung der Analysis und Arithmetik auf die Mengenlehre
um 1900:	Antinomien: Cantorsche Mengenlehre führt zu Widersprüchen (vgl. die **Russellsche Antinomie** zur *"Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthält"*) $\Longrightarrow$ Notwendigkeit einer neuen Grundlegung der Mathematik/Mengenlehre

um 1900:	Hilberts Programm. Ziel: • Formalisierung der Mathematik • Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik
um 1910:	Russel, Whitehead: Mengenlehre mit Typen
um 1920:	Zermelo, Fraenkel: Axiomatische Mengenlehre
1930:	Gödels Vollständigkeitsatz
1931:	**Gödels Unvollständigkeitsätze**
1936:	**Church/Turing**: Es gibt kein Programm, das für alle mathematischen Aussagen entscheidet, ob sie wahr oder falsch sind.

Logik in der Informatik

Anwendungsbereiche der Logik in der Informatik

- Logische Programmierung
- Automatisches Beweisen
- Programm-Verifikation
- **Model Checking** (automatische Verifikation)
- **Logik als Datenbank-Anfragesprache**

Model Checking

Zwei Beispiele zur Motivation:

1. Der Pentium-Fehler

   Pentium-Prozessor (1993):

   - Zur Effizienz-Steigerung der Division wurden Wertetabellen verwendet.
   - ABER: 5 Einträge waren falsch!
     $\rightsquigarrow$ ca. 1 Fehler je 9 Milliarden Divisionen
     ($\Rightarrow$ Fehler durch "Testen" nicht leicht zu finden)

   Kosten: ca. 475 Millionen US-Dollar
   Intel hat danach viele Experten für automatische Verifikation gesucht!

Model Checking

Zwei Beispiele zur Motivation:

1. Der Pentium-Fehler

   Pentium-Prozessor (1993):

   - Zur Effizienz-Steigerung der Division wurden Wertetabellen verwendet.
   - ABER: 5 Einträge waren falsch!
     $\leadsto$ ca. 1 Fehler je 9 Milliarden Divisionen
     ($\Rightarrow$ Fehler durch "Testen" nicht leicht zu finden)

   Kosten: ca. 475 Millionen US-Dollar
   Intel hat danach viele Experten für automatische Verifikation gesucht!

2. Die Ariane 5-Rakete (1996)

   Messwerte wurden von 64-Bit-Zahlen in 16-Bit-Zahlen umgewandelt.

   - Das hatte bei Ariane 4 gut funktioniert.
   - ABER: aufgrund der technischen Änderungen waren die Werte bei Ariane 5 größer als erwartet
     $\leadsto$ Überlauf! Das System schaltete sich ab und die Rakete stürzte ab.

   Kosten: ca. 370 Millionen US-Dollar

Prinzip der automatischen Verifikation

1. Modelliere das zu testende System durch ein **Transitionssystem** $\mathcal{T}$ (eine bestimmte logische Struktur; ein beschrifteter Graph).
2. Drücke die (erwünschte oder unerwünschte) Systemeigenschaft durch eine Formel φ einer geeigneten Logik aus.
3. Teste, **ob** $\mathcal{T}$ **die Formel** φ **erfüllt**.

Logik als Grundlage für Datenbank-Anfragesprachen

Grundprinzip:

- Datenbank $\widehat{=}$ logische Struktur $\mathcal{A}$
- Anfrage $\widehat{=}$ Formel φ einer geeigneten Logik
- Auswerten der Anfrage auf der Datenbank $\widehat{=}$ Testen, ob "$\mathcal{A}$ erfüllt φ" gilt

Details: Vorlesungen *Logik in der Informatik* und *Einführung in die Datenbanktheorie* .

In dieser Vorlesung

Kapitel 1 Der Vollständigkeitssatz

Kapitel 2 Der Endlichkeitssatz & die Sätze von Löwenheim und Skolem

Kapitel 3 Die Grenzen der Berechenbarkeit

Kapitel 4 Gödels Unvollständigkeitssätze

Kapitel 5 Ordnungsinvarianten

Abschnitt 0.2:

Syntax und Semantik der Logik erster Stufe

Strukturen

Die Objekte, über die Formeln der Logik erster Stufe Aussagen treffen können, heißen **Strukturen**. Viele Objekte lassen sich auf natürliche Weise durch solche Strukturen repräsentieren, beispielsweise

- Graphen $G = (V, E)$ oder Bäume $B = (V, E)$,
- die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$,
- die reellen Zahlen mit Addition, Multiplikation und Konstanten 0 und 1: $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$,
- relationale Datenbanken.

Definition 0.1

Eine **Signatur** (auch **Symbolmenge** bzw. **Vokabular**) ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und/oder Konstantensymbolen. Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine **Stelligkeit** (bzw. **Arität**, engl. arity)

$$\mathrm{ar}(R) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{ar}(f) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}.$$

Wir benutzen hier folgende Notation: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_{\geqslant 1} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notation 0.2

- Der griechische Buchstabe σ bezeichnet in diesem Vorlesungsskript stets eine Signatur.
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie $R, P, E, Q, R_1, R_2, \ldots$.
- Für Funktionssymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$.
- Für Konstantensymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $c, d, c_1, c_2, \ldots$.
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\leqslant$ (2-stelliges Relationssymbol) bzw. $+, \cdot$ (2-stellige Funktionssymbole), und als Konstantensymbole Zahlen wie 0, 1.
- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie unter das Symbol schreiben.

Beispiel

Die Notation $\underset{2}{R}$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Definition 0.3

Eine σ-**Struktur** (bzw. Struktur über σ) $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten **Universum** (bzw. Träger, Grundbereich; engl. domain) von $\mathcal{A}$ und folgenden Komponenten:

Definition 0.3

Eine σ-**Struktur** (bzw. Struktur über σ) $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten **Universum** (bzw. Träger, Grundbereich; engl. domain) von $\mathcal{A}$ und folgenden Komponenten:
- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ eine $\mathrm{ar}(R)$-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$,

Definition 0.3

Eine σ-**Struktur** (bzw. Struktur über σ) $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten **Universum** (bzw. Träger, Grundbereich; engl. domain) von $\mathcal{A}$ und folgenden Komponenten:
- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ eine $\mathrm{ar}(R)$-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$,
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ eine Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$,

Definition 0.3

Eine σ-**Struktur** (bzw. Struktur über σ) $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten **Universum** (bzw. Träger, Grundbereich; engl. domain) von $\mathcal{A}$ und folgenden Komponenten:
- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ eine $\mathrm{ar}(R)$-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$,
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ eine Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$,
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ein Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Notation 0.4

- Strukturen bezeichnen wir meistens mit kalligraphischen Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{G}, \ldots$; das Universum der Strukturen durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben $A, B, G, \ldots$.
- Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, so schreiben wir oft $\mathcal{A} = (A, (S^{\mathcal{A}})_{S \in \sigma})$, um die Komponenten von $\mathcal{A}$ anzugeben. Falls σ endlich und von der Form

  $$\sigma \;=\; \{\, R_1, \ldots R_k, f_1, \ldots, f_\ell, c_1, \ldots, c_m \,\}$$

  ist, so schreiben wir auch

  $$\mathcal{A} \;=\; \big(\, A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots R_k^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_\ell^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_m^{\mathcal{A}} \,\big)\,,$$

  um eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ zu bezeichnen.

Beispiel 0.5 (Arithmetische Strukturen)

Sei $\sigma_{\mathsf{Ar}} := \{ \leqslant, +, \cdot, 0, 1 \}$, wobei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, $+, \cdot$ zwei 2-stellige Funktionssymbole und $0, 1$ zwei Konstantensymbole sind.

(a) Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} \; := \; \mathcal{A}_{\mathbb{N}} \; := \; (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}),$$

wobei $\leqslant^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist, $+^{\mathcal{N}}$ und $\cdot^{\mathcal{N}}$ die Addition bzw. die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $0^{\mathcal{N}}$ bzw. $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 bzw. 1 sind.

(b) Entsprechend können wir σ_{Ar}-Strukturen $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ mit Universum $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ definieren.

Beispiel 0.6 (Graphen und Bäume)

Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{ E \}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Jeder gerichtete Graph bzw. gerichtete Baum (V, E) (mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$) lässt sich als σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit

- Universum $A := \ V$ und
- Relation $E^{\mathcal{A}} := \ E$

auffassen.

Beispiel 0.6 (Graphen und Bäume)

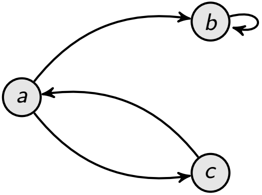
Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{ E \}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Jeder gerichtete Graph bzw. gerichtete Baum (V, E) (mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$) lässt sich als σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit

- Universum $A := V$ und
- Relation $E^{\mathcal{A}} := E$

auffassen.

Beispiel:

Graph:



zugehörige σ_{Graph}-Struktur:

$\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit

- $A = \{ a, b, c \}$
- $E^{\mathcal{A}} = \{ (a, b), (b, b), (a, c), (c, a) \}$

Isomorphie

Frage

Wann sind zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ "prinzipiell gleich" (Fachbegriff: isomorph)?

Isomorphie

Frage

Wann sind zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ "prinzipiell gleich" (Fachbegriff: isomorph)?

Antwort

Falls $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathcal{A}$ umbenennt.

Definition 0.7

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein **Isomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) π ist bijektiv.

Definition 0.7

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein **Isomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) π ist bijektiv.

(b) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Definition 0.7

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein **Isomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) π ist bijektiv.

(b) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$

(c) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k)\right) = f^{\mathcal{B}}\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big).$$

Definition 0.7

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein **Isomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) π ist bijektiv.

(b) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$

(c) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k)\right) \;=\; f^{\mathcal{B}}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big).$$

(d) Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gilt:

$$\pi\left(c^{\mathcal{A}}\right) \;=\; c^{\mathcal{B}}.$$

Notation

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ um auszudrücken, dass π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Definition 0.8

Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind **isomorph** (kurz: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es einen Isomorphismus π von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

Satz 0.9

*Isomorphie ($\cong$) ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Klasse aller σ-Strukturen, d.h. für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gilt:*

(a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ *(Reflexivität).*

(b) *Falls* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, *so auch* $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ *(Symmetrie).*

(c) *Falls* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *und* $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, *so auch* $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ *(Transitivität).*

Beweis: Übung.

$\square$

Syntax der Logik erster Stufe

Bestandteile:

- aussagenlogische Junktoren

$\neg$,	$\wedge$,	$\vee$,	$\rightarrow$
„nicht“	„und“	„oder“	„wenn ..., dann“

- Variablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ um Elemente aus dem Universum einer Struktur zu bezeichnen
- Quantoren: $\exists$ (“es existiert”), $\forall$ (“für alle”)
- Symbole für Elemente aus der Signatur σ

Definition 0.10 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe)

(a) Eine **Individuenvariable** (kurz: **Variable**) hat die Form v_i, für $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR. D.h.

$$\text{VAR} \ := \ \{ \, v_i \ : \ i \in \mathbb{N} \, \} \ = \ \{ \, v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots \}.$$

Definition 0.10 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe)

(a) Eine **Individuenvariable** (kurz: **Variable**) hat die Form v_i, für $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR. D.h.

$$\mathrm{VAR} \ := \ \{ \, v_i \ : \ i \in \mathbb{N} \, \} \ = \ \{ \, v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots \}.$$

(b) Sei σ eine Signatur. Das Alphabet $A_{\mathrm{FO}[\sigma]}$ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

- den Variablen in VAR
- den Symbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol $=$
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- den Klammern (,)
- dem Komma ,

Definition 0.10 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe)

(a) Eine **Individuenvariable** (kurz: **Variable**) hat die Form v_i, für $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR. D.h.

$$\text{VAR} \;:=\; \{\, v_i \;:\; i \in \mathbb{N} \,\} \;=\; \{\, v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots \}.$$

(b) Sei σ eine Signatur. Das Alphabet $A_{\text{FO}[\sigma]}$ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

- den Variablen in VAR
- den Symbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol $=$
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- den Klammern (,)
- dem Komma ,

D.h.:

$$A_{\text{FO}[\sigma]} \;=\; \text{VAR} \cup \sigma \cup \{\exists, \forall\} \cup \{=\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \cup \{(,)\} \cup \{,\}.$$

Notation

$A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$.

Notation

$A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$.

Definition 0.11 (Terme der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur. Die Menge T_σ aller σ-**Terme** ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_\sigma$.

Notation

$A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$.

Definition 0.11 (Terme der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur. Die Menge T_σ aller σ-**Terme** ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ ist $x \in T_\sigma$.

Notation

$A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$.

Definition 0.11 (Terme der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur. Die Menge T_σ aller σ-**Terme** ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ ist $x \in T_\sigma$.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jedes k-stellige Funktionssymbol $f \in \sigma$ gilt: Sind $t_1 \in T_\sigma, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k) \in T_\sigma$.

Definition 0.12 (Formeln der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur. Die Menge $\mathbf{FO}[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: **FO**$[\sigma]$**-Formeln**; „FO" steht für die englische Bezeichnung **first-order logic**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$:

Definition 0.12 (Formeln der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur. Die Menge **FO**$[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: **FO**$[\sigma]$**-Formeln**; „FO" steht für die englische Bezeichnung **first-order logic**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$:

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 gilt

$$t_1 = t_2 \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma].$$

Definition 0.12 (Formeln der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur. Die Menge $\mathbf{FO}[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: **$\mathbf{FO}[\sigma]$-Formeln**; „FO“ steht für die englische Bezeichnung **first-order logic**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$:

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 gilt

$$t_1 = t_2 \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma].$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ gilt:

$$R(t_1, \ldots, t_k) \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma].$$

Definition 0.12 (Formeln der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur. Die Menge **FO**$[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: **FO**$[\sigma]$**-Formeln**; „FO“ steht für die englische Bezeichnung **first-order logic**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathrm{FO}[\sigma]}$:

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 gilt
$$t_1 = t_2 \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma].$$
- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ gilt:
$$R(t_1, \ldots, t_k) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma].$$

FO$[\sigma]$-Formeln der Form $t_1 = t_2$ bzw. $R(t_1, \ldots, t_k)$ heißen auch **atomare** Formeln.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist auch
  - $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist auch
  - $(\varphi \wedge \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \vee \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \mathrm{VAR}$, so ist auch
  - $\exists x \ \varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
  - $\forall x \ \varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.

Beispiel 0.13

(a) Sei $\sigma = \{ \underset{2}{f}, c \}$. Folgende Worte sind FO[σ]-Formeln:

- $f(v_0, v_1) = c$
- $\forall v_2 \; f(v_2, c) = v_2$
- $\neg \exists v_3 \; (f(v_2, v_3) = v_3 \; \wedge \; \neg \, v_3 = c)$

Beispiel 0.13

(a) Sei $\sigma = \{ \underset{2}{f}, c \}$. Folgende Worte sind FO[σ]-Formeln:

- $f(v_0, v_1) = c$
- $\forall v_2 \; f(v_2, c) = v_2$
- $\neg \exists v_3 \; (f(v_2, v_3) = v_3 \;\wedge\; \neg v_3 = c)$

Folgende Worte sind keine FO[σ]-Formeln:

- $(f(v_0, v_1) = c)$
- $f(v_0, v_1)$ (dies ist ein σ-Term, aber keine FO[σ]-Formel)
- $(\forall v_2 \; (f(v_2, c) = v_2))$
- $\exists c \; f(v_0, c) = v_0$

(b) Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{ \underset{2}{E} \}$. Folgendes ist eine FO[$\sigma_{\text{Graph}}$]-Formel:

$$\forall v_0 \, \forall v_1 \, \Big(\big(E(v_0, v_1) \land E(v_1, v_0) \big) \ \to \ v_0 = v_1 \Big).$$

(b) Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{ \underset{2}{E} \}$. Folgendes ist eine FO[$\sigma_{\text{Graph}}$]-Formel:

$$\forall v_0 \, \forall v_1 \; \Big(\big(E(v_0, v_1) \land E(v_1, v_0) \big) \; \rightarrow \; v_0 = v_1 \Big).$$

Intuition zur Semantik (die formale Definition der Semantik wird auf den nächsten Seiten angegeben):
In einem gerichteten Graphen $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ sagt die Formel

$$\forall v_0 \, \forall v_1 \; \Big(\big(E(v_0, v_1) \land E(v_1, v_0) \big) \; \rightarrow \; v_0 = v_1 \Big)$$

Folgendes aus:

„*Für alle Knoten $a_0 \in A$ und für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:*

Falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathcal{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathcal{A}}$, so ist $a_0 = a_1$“.

Die Formel sagt in einem Graphen $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ also gerade aus, dass die Kantenrelation **antisymmetrisch** ist. Ein Graph $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ **erfüllt** die Formel genau dann, wenn die Kantenrelation $E^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

Notation 0.14

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$.
- Formeln bezeichnen wir meistens mit griechischen Kleinbuchstaben $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
  Formel**mengen** mit griechischen Großbuchstaben $\Phi, \Psi, \ldots$.
- Bezüglich Klammerung verwenden wir folgende Bindungsregeln:
  (a) $\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren.
  (b) $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg.
  D.h. wir schreiben z.B. $\varphi \wedge \psi \ \rightarrow \ \chi$ an Stelle von $((\varphi \wedge \psi) \ \rightarrow \ \chi))$.
- Bei Termen und atomaren Formeln schreiben wir manchmal
  - $Rt_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $R(t_1, \ldots, t_k)$,
  - $ft_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $f(t_1, \ldots, t_k)$.

- Für gewisse 2-stellige Funktionssymbole wie $+, \cdot \in \sigma_{\mathrm{Ar}}$ und gewisse 2-stellige Relationssymbole wie $\leqslant$ verwenden wir **Infix- statt Präfixschreibweise** und setzen Klammern dabei auf natürliche Weise, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.

Beispiel

- An Stelle des (formal korrekten) Terms $\cdot(+(v_1, v_2), v_3)$ schreiben wir $(v_1 + v_2) \cdot v_3$.
- An Stelle der (formal korrekten) atomaren Formel $\leqslant(v_1, v_2)$ schreiben wir $v_1 \leqslant v_2$.

Semantik der Logik erster Stufe

Definition 0.15 (Subformeln bzw. Teilformeln)

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{sub}(\varphi) \subseteq \text{FO}[\sigma]$ aller **Subformeln** (oder: **Teilformeln**) von φ wie folgt:

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so ist $\text{sub}(\varphi) \ := \ \{ \varphi \}$.

Definition 0.15 (Subformeln bzw. Teilformeln)

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge sub(φ) $\subseteq$ FO[σ] aller **Subformeln** (oder: **Teilformeln**) von φ wie folgt:

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so ist $\text{sub}(\varphi) \ := \ \{\varphi\}$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ für eine FO[σ]-Formel ψ, so ist $\text{sub}(\varphi) \ := \ \{\varphi\} \cup \text{sub}(\psi)$.

Definition 0.15 (Subformeln bzw. Teilformeln)

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{sub}(\varphi) \subseteq \text{FO}[\sigma]$ aller **Subformeln** (oder: **Teilformeln**) von φ wie folgt:

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\}$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ für eine FO[σ]-Formel ψ, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \text{sub}(\psi)$.
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und FO[σ]-Formeln ψ_1 und ψ_2, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \text{sub}(\psi_1) \cup \text{sub}(\psi_2)$.

Definition 0.15 (Subformeln bzw. Teilformeln)

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{sub}(\varphi) \subseteq \text{FO}[\sigma]$ aller **Subformeln** (oder: **Teilformeln**) von φ wie folgt:

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\}$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ für eine FO[σ]-Formel ψ, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \text{sub}(\psi)$.
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und FO[σ]-Formeln ψ_1 und ψ_2, so ist $\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \text{sub}(\psi_1) \cup \text{sub}(\psi_2)$.
- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ für $Q \in \{\exists, \forall\}, x \in \text{VAR}$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist

$$\text{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \text{sub}(\psi).$$

Beispiel

$$\text{sub}\Big(\ \forall v_0\,\forall v_1\ \Big(\big(E(v_0,v_1)\wedge E(v_1,v_0)\big)\ \to\ v_0=v_1\Big)\ \Big)\ =$$

$$\Big\{\forall v_0\,\forall v_1\ \Big(\big(E(v_0,v_1)\wedge E(v_1,v_0)\big)\ \to\ v_0=v_1\Big),$$
$$\forall v_1\ \Big(\big(E(v_0,v_1)\wedge E(v_1,v_0)\big)\ \to\ v_0=v_1\Big),$$
$$\Big(\big(E(v_0,v_1)\wedge E(v_1,v_0)\big)\ \to v_0=v_1\Big),$$
$$\big(E(v_0,v_1)\wedge E(v_1,v_0)\big),$$
$$v_0=v_1,$$
$$E(v_0,v_1),$$
$$E(v_1,v_0)\Big\}$$

Definition 0.16 (Variablen in Termen)

Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge $\text{var}(t) \subseteq \text{VAR}$ der **Variablen von** t wie folgt:

- Für $x \in \text{VAR}$ ist $\text{var}(x) := \{ x \}$.

Definition 0.16 (Variablen in Termen)

Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge $\text{var}(t) \subseteq \text{VAR}$ der **Variablen von** t wie folgt:

- Für $x \in \text{VAR}$ ist $\text{var}(x) := \{ x \}$.
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $\text{var}(c) := \emptyset$.

Definition 0.16 (Variablen in Termen)

Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge $\text{var}(t) \subseteq \text{VAR}$ der **Variablen von** t wie folgt:

- Für $x \in \text{VAR}$ ist $\text{var}(x) := \{ x \}$.
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $\text{var}(c) := \emptyset$.
- Ist $t \in T_\sigma$ von der Form $f(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $f \in \sigma$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist $\text{var}(t) := \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_k)$.

Definition 0.17 (Freie Variablen in Formeln)

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{VAR}$ aller **freien Variablen von** φ wie folgt:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \;:=\; \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2).$$

Definition 0.17 (Freie Variablen in Formeln)

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{VAR}$ aller **freien Variablen von** φ wie folgt:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2).$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \dots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$ ein k-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_k).$$

Definition 0.17 (Freie Variablen in Formeln)

Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{VAR}$ aller **freien Variablen von** φ wie folgt:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2).$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$ ein k-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_k).$$

- Ist φ von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{frei}(\psi).$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist

$$\mathrm{frei}(\varphi) \;:=\; \mathrm{frei}(\psi_1) \cup \mathrm{frei}(\psi_2).$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist

$$\mathrm{frei}(\varphi) \ := \ \mathrm{frei}(\psi_1) \cup \mathrm{frei}(\psi_2).$$

- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathrm{VAR}$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist

$$\mathrm{frei}(\varphi) \ := \ \mathrm{frei}(\psi) \setminus \{x\}.$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist

$$\mathrm{frei}(\varphi) \; := \; \mathrm{frei}(\psi_1) \cup \mathrm{frei}(\psi_2).$$

- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathrm{VAR}$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist

$$\mathrm{frei}(\varphi) \; := \; \mathrm{frei}(\psi) \setminus \{x\}.$$

Beispiel

$$\varphi \; := \; \Big(\underbrace{\underbrace{f(v_0, c) = v_3}_{\text{freie Variablen: } v_0,\, v_3} \;\wedge\; \underbrace{\exists v_0 \; \underbrace{f(v_0, v_1) = c}_{\text{freie Variablen: } v_0,\, v_1}}_{\text{freie Variablen: } v_1}}_{\text{freie Variablen: } v_0,\, v_1,\, v_3} \Big)$$

Definition 0.18 (Sätze)

Eine FO[σ]-Formel φ heißt **Satz** (genauer: FO[σ]-Satz), falls $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$.
Die Menge aller FO[σ]-Sätze bezeichnen wir mit S_σ.

Definition 0.19 (Belegungen und Interpretationen)

(a) Eine **Belegung in einer σ-Struktur** $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\beta : D \to A$ mit $\text{Def}(\beta) := D \subseteq \text{VAR}$.

(b) Eine Belegung β heißt **passend zu** $t \in T_\sigma$, falls $\text{Def}(\beta) \supseteq \text{var}(t)$.

(c) Eine Belegung β heißt **passend zu** $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ (bzw. eine Belegung **für** φ), wenn $\text{Def}(\beta) \supseteq \text{frei}(\varphi)$.

(d) Eine σ-**Interpretation** ist ein Paar $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

(e) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ heißt **passend zu** (oder **Interpretation für**) $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ (bzw. $t \in T_\sigma$), falls β passend zu φ (bzw. t) ist.

Definition 0.20 (Semantik von σ-Termen)

Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

Definition 0.20 (Semantik von σ-Termen)

Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \mathrm{VAR}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.

Definition 0.20 (Semantik von σ-Termen)

Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \text{VAR}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.

Definition 0.20 (Semantik von σ-Termen)

Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \text{VAR}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; f^{\mathcal{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right).$$

Beispiel

Sei $\sigma := \{ \underset{2}{f}, c \}$, und sei $\mathcal{A} := \big(A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}\big)$ mit $A := \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}} := +^{\mathcal{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$), $c^{\mathcal{A}} := 0$.
Sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$, und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$. Sei $t := f(v_2, f(v_1, c)) \in T_\sigma$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= f^{\mathcal{A}}\left([\![v_2]\!]^{\mathcal{I}}, [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\
&= [\![v_2]\!]^{\mathcal{I}} + [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}} \\
&= \beta(v_2) + f^{\mathcal{A}}\left([\![v_1]\!]^{\mathcal{I}}, [\![c]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\
&= 7 + \big(\beta(v_1) + c^{\mathcal{A}}\big) \\
&= 7 + (1 + 0) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Definition 0.21

(a) Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, ist $x \in \text{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei $\beta\frac{a}{x}$ die Belegung mit $\text{Def}\left(\beta\frac{a}{x}\right) := \text{Def}(\beta) \cup \{\, x \,\}$, die für alle $y \in \text{Def}\left(\beta\frac{a}{x}\right)$ definiert ist durch

$$\beta\frac{a}{x}(y) \;:=\; \begin{cases} a & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in \text{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei

$$\mathcal{I}\frac{a}{x} \;:=\; \left(\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x}\right).$$

Definition 0.22 (Semantik der Logik erster Stufe)

Rekursiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir eine Funktion $\llbracket\cdot\rrbracket^{\cdot}$, die jeder FO[$\sigma$]-Formel φ und jeder zu φ passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen **Wahrheitswert** (kurz: **Wert**)
$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet:

Definition 0.22 (Semantik der Logik erster Stufe)

Rekursiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder FO[σ]-Formel φ und jeder zu φ passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen **Wahrheitswert** (kurz: **Wert**)
$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{ 0, 1 \}$ zuordnet:

Rekursionsanfang:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$[\![t_1{=}t_2]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 0.22 (Semantik der Logik erster Stufe)

Rekursiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder FO[σ]-Formel φ und jeder zu φ passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen **Wahrheitswert** (kurz: **Wert**)
$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet:

Rekursionsanfang:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$[\![t_1{=}t_2]\!]^{\mathcal{I}} \ := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{T}_\sigma$ gilt:

$$[\![R(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \begin{cases} 1, & \text{falls } \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursionsschritt:

- Für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ ist

Rekursionsschritt:

- Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist

$$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursionsschritt:

- Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist

$$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \land \psi)]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } \; [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \; \text{ und } \; [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursionsschritt:

- Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist

$$\llbracket \neg\varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \wedge \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \vee \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 0, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursionsschritt:

- Für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ ist

$$\llbracket \neg\varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \wedge \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \vee \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 0, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \to \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 0, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]\sigma$ und ist $x \in \mathrm{VAR}$, so ist

$$[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls es (mind.) ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]\sigma$ und ist $x \in \mathrm{VAR}$, so ist

$$[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls es (mind.) ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

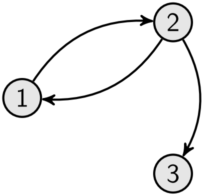
$$[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls für } \textit{jedes } a \in A \text{ gilt: } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Betrachte die Formel $\varphi := \forall x \, \forall y \; (E(x,y) \;\rightarrow\; E(y,x))$ über der Signatur $\sigma = \{ \underset{2}{E} \}$ und die σ-Struktur $\mathcal{A} := \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ mit $A = \{1,2,3\}$, $E^{\mathcal{A}} = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ (im Folgenden auch graphisch dargestellt).

Skizze:

$\mathcal{A}$:



Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$, wobei β die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta) = \emptyset$ sei.

Dann gilt: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt:

$$[\![(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$$

$\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt:

$(a,b) \notin E^{\mathcal{A}}$ oder $(b,a) \in E^{\mathcal{A}}$

$\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt:

falls $(a,b) \in E^{\mathcal{A}}$, so auch $(b,a) \in E^{\mathcal{A}}$

$\iff$ $E^{\mathcal{A}}$ ist symmetrisch.

Da in unserem konkreten Graphen $\mathcal{A}$ für $a = 2,\ b = 3$ gilt: $(a,b) \in E^{\mathcal{A}}$, aber $(b,a) \notin E^{\mathcal{A}}$, ist hier $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$.

Definition 0.23 (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)

Sei φ eine FO[σ]-Formel.

(a) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ **erfüllt** φ (bzw.: **ist ein Modell von** φ, kurz: $\mathcal{I} \models \varphi$), falls $\mathcal{I}$ passend zu φ ist und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

(b) φ heißt **erfüllbar**, falls es eine σ-Interpretation gibt, die φ erfüllt.
φ heißt **unerfüllbar**, falls φ nicht erfüllbar ist.

(c) φ heißt **allgemeingültig**, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt.

Definition 0.23 (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)

Sei φ eine FO[σ]-Formel.

(a) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ **erfüllt** φ (bzw.: **ist ein Modell von** φ, kurz: $\mathcal{I} \models \varphi$), falls $\mathcal{I}$ passend zu φ ist und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

(b) φ heißt **erfüllbar**, falls es eine σ-Interpretation gibt, die φ erfüllt.
φ heißt **unerfüllbar**, falls φ nicht erfüllbar ist.

(c) φ heißt **allgemeingültig**, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt.

Beobachtung

Für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

- φ allgemeingültig $\iff$ $\neg\varphi$ unerfüllbar.
- φ erfüllbar $\iff$ $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig.

Beispiel 0.24

(Graphen)
Sei $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$ und $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ eine σ-Struktur.

(a) Für alle $a, b \in A$ gilt: Es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg der Länge 3 von a nach b

$$\iff (\mathcal{A}, \beta_\emptyset) \quad \models \quad \forall x\, \forall y\ \exists z_1\, \exists z_2\ \big(E(x, z_1) \land E(z_1, z_2) \land E(z_2, y)\big).$$

Hierbei ist $\beta_\emptyset$ die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta_\emptyset) = \emptyset$.

(b) $\mathcal{A}$ hat Durchmesser $\leqslant 3$, d.h. zwischen je zwei Knoten von $\mathcal{A}$ gibt es einen Weg der Länge $\leqslant 3$

$$\iff (\mathcal{A}, \beta_\emptyset) \quad \models \quad \forall x\, \forall y\ \Big(\ x = y\ \lor\ E(x, y)\ \lor\ \exists z\ \big(E(x, z) \land E(z, y)\big)$$
$$\lor\ \exists z_1\, \exists z_2\ \big(E(x, z_1) \land E(z_1, z_2) \land E(z_2, y)\big)\ \Big).$$

Beispiel 0.25 (Arithmetik)

Sei $\sigma_{\text{Ar}} = \{ \leqslant, +, \cdot, 0, 1 \}$, sei $\mathcal{N} := \big(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\big)$, seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, und sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = a$, $\beta(v_2) = b$, $\beta(v_3) = c$.

(a) $a \mid b$ ("a teilt b in $\mathbb{N}$") $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2)$ mit

$$\varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2) \quad := \quad \exists v_0 \; v_1 \cdot v_0 = v_2 \; .$$

Beispiel 0.25 (Arithmetik)

Sei $\sigma_{\mathrm{Ar}} = \{ \leqslant, +, \cdot, 0, 1 \}$, sei $\mathcal{N} := \big(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\big)$, seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, und sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = a$, $\beta(v_2) = b$, $\beta(v_3) = c$.

(a) $a \,|\, b$ ("a teilt b in $\mathbb{N}$") $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\mathrm{teilt}}(v_1, v_2)$ mit

$$\varphi_{\mathrm{teilt}}(v_1, v_2) \quad := \quad \exists v_0 \; v_1 \cdot v_0 \; = v_2 \; .$$

(b) $c = a - b \iff (\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{-}(v_1, v_2, v_3)$ mit

$$\varphi_{-}(v_1, v_2, v_3) \quad := \quad v_2 + v_3 = v_1 .$$

Beispiel 0.25 (Arithmetik)

Sei $\sigma_{\text{Ar}} = \{ \leqslant, +, \cdot, 0, 1 \}$, sei $\mathcal{N} := \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\right)$, seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, und sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = a,\ \beta(v_2) = b,\ \beta(v_3) = c$.

(a) $a \,|\, b$ (“a teilt b in $\mathbb{N}$”) $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2)$ mit

$$\varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2) \quad := \quad \exists v_0 \ v_1 \cdot v_0 \ = v_2 \ .$$

(b) $c = a - b \iff (\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{-}(v_1, v_2, v_3)$ mit

$$\varphi_{-}(v_1, v_2, v_3) \quad := \quad v_2 + v_3 = v_1 .$$

(c) a ist eine Primzahl $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\text{prim}}(v_1)$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{prim}}(v_1) \quad := \quad & \neg\, v_1 = 0 \ \wedge \ \neg\, v_1 = 1 \ \wedge \\ & \forall v_4 \, \forall v_5 \ \big(v_1 = v_4 \cdot v_5 \ \rightarrow \ (v_4 = 1 \ \vee \ v_5 = 1) \big). \end{aligned}$$

(d) Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen $\iff$

$$(\mathcal{N}, \beta) \quad \models \quad \forall v_0 \ \exists v_1 \quad \big(v_0 \leqslant v_1 \ \wedge \ \varphi_{\text{prim}}(v_1) \big),$$

wobei β eine beliebige Belegung in $\mathcal{N}$ ist.

Das Koinzidenzlemma

Das Koinzidenzlemma präzisiert den (anschaulich offensichtlichen) Sachverhalt, dass die Frage, ob eine FO[σ]-Formel φ von einer σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ erfüllt wird (d.h. ob $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt), nur abhängt von

- der Belegung der in φ frei vorkommenden Variablen (d.h. für Variablen $x \notin \text{frei}(\varphi)$ ist egal, welchen Wert $\beta(x)$ annimmt) und
- der Interpretation $S^{\mathcal{A}}$ der Symbole $S \in \sigma$, die in φ vorkommen (d.h. für Symbole $S' \in \sigma$, die nicht in φ erwähnt werden, ist egal, wie $(S')^{\mathcal{A}}$ aussieht).

Definition 0.26

Seien σ_1, σ_2 zwei Signaturen. Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation mit $A_1 = A_2$ (d.h. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ haben dasselbe Universum).

(a) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$) **stimmen auf einem Symbol S überein**, wenn $S \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ und $S^{\mathcal{A}_1} = S^{\mathcal{A}_2}$.

(b) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. β_1 und β_2) **stimmen auf einer Variablen x überein**, wenn $x \in \mathrm{Def}(\beta_1) \cap \mathrm{Def}(\beta_2)$ und $\beta_1(x) = \beta_2(x)$.

Satz 0.27 (Koinzidenzlemma)

Seien σ, σ_1, σ_2 Signaturen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$. Für $i \in \{1,2\}$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathcal{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i-Interpretation, so dass $A_1 = A_2$.

(a) *Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in t vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.*

(b) *Sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von φ übereinstimmen. Dann gilt:*
$\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Satz 0.27 (Koinzidenzlemma)

Seien σ, σ_1, σ_2 Signaturen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$. Für $i \in \{1,2\}$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathcal{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i-Interpretation, so dass $A_1 = A_2$.

(a) *Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in t vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.*

(b) *Sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von φ übereinstimmen. Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.*

Bemerkung 0.28

Wegen des Koinzidenzlemmas können wir einerseits o.B.d.A. annehmen, dass Belegungen “minimal” sind (d.h. ihr Definitionsbereich enthält gerade die freien Variablen einer Formel oder eines Terms). Andererseits können wir aber auch annehmen, dass ihr Definitionsbereich “maximal” ist (d.h. **alle** Variablen aus VAR enthält). Beides wird gelegentlich nützlich sein.

Notation 0.29

(a) Für $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ schreiben wir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, um auszudrücken, dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \ldots, x_1\} \supseteq \text{frei}(\varphi)$.
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $a_i := \beta(x_i)$. An Stelle von $\mathcal{I} \models \varphi$ schreiben wir oft auch $\mathcal{A} \models \varphi[\frac{a_1}{x_1}, \ldots, \frac{a_n}{x_n}]$.

Beachte

Diese Schreibweise ist zulässig, da nach dem Koinzidenzlemma für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}, \beta')$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\mathcal{I}' \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi.$$

(b) Um die Notation weiter zu vereinfachen schreiben wir auch kurz

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{an Stelle von} \quad \mathcal{A} \models \varphi\left[\frac{a_1}{x_1}, \ldots, \frac{a_n}{x_n}\right].$$

(c) Für **FO**[σ]-**Sätze** φ schreiben wir einfach

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{an Stelle von} \quad \text{“}(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \text{ für eine Belegung } \beta\text{”}.$$

Beachte

Gemäß Koinzidenzlemma gilt für alle Belegungen β und β', dass

$$(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \beta') \models \varphi.$$

(d) Ähnliche Schreibweisen verwenden wir für Terme:

- Ist $t \in T_\sigma$ mit $\text{var}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, so schreibe kurz auch $t(x_1, \ldots, x_n)$.
- Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $a_i := \beta(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, so schreibe an Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ auch

$$t^{\mathcal{A}}\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \ldots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \quad \text{bzw.} \quad t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n].$$

- An Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ schreiben wir manchmal auch $\mathcal{I}(t)$.

Definition 0.30 (Redukte und Expansionen)

Seien σ, τ Signaturen mit $\tau \subseteq \sigma$.

(a) Das τ-**Redukt** einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die τ-Struktur $\mathcal{A}_{|\tau}$ mit Universum $A_{|\tau} = A$, die mit $\mathcal{A}$ auf allen Symbolen aus τ übereinstimmt.

(b) Eine σ-**Expansion** einer τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, für die gilt: $\mathcal{A}_{|\tau} = \mathcal{B}$.

Definition 0.30 (Redukte und Expansionen)

Seien σ, τ Signaturen mit $\tau \subseteq \sigma$.

(a) Das τ-**Redukt** einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die τ-Struktur $\mathcal{A}_{|\tau}$ mit Universum $A_{|\tau} = A$, die mit $\mathcal{A}$ auf allen Symbolen aus τ übereinstimmt.

(b) Eine σ-**Expansion** einer τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, für die gilt: $\mathcal{A}_{|\tau} = \mathcal{B}$.

Beispiel 0.31

Zur Erinnerung: Das Standardmodell der Arithmetik ist

$$\mathcal{N} \ = \ \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\right).$$

Das $\{\leqslant, +, 0\}$-Redukt von $\mathcal{N}$ ist

$$\mathcal{N}_{|\{\leqslant,+,0\}} \ = \ \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}\right).$$

Die Struktur $\mathcal{N}_{|\{\leqslant,+,0\}}$ bezeichnet man als das **Standardmodell der Presburger Arithmetik** (benannt nach M. Presburger, 1904–1943).

Das Isomorphielemma

Satz 0.32 (Isomorphielemma)

Sei φ ein FO[σ]*-Satz und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi.$$

Satz 0.32 (Isomorphielemma)

Sei φ ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi.$$

Beweis: Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Behauptung 1

Für alle σ-Terme $t(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\pi(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \quad = \quad t^{\mathcal{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Satz 0.32 (Isomorphielemma)

Sei φ ein FO$[\sigma]$*-Satz und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi.$$

Beweis: Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Behauptung 1

Für alle σ-Terme $t(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\pi(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \quad = \quad t^{\mathcal{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Behauptung 2

Für alle FO$[\sigma]$-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

$\square_{\text{Satz 0.32}}$

Obiger Beweis zeigt sogar folgendes Resultat:

Korollar 0.33

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Für jede $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Abschnitt 0.3:

Substitutionen

Die in diesem Abschnitt definierten *Substitutionen* liefern einen Begriff des „Ersetzens" von Variablen durch Terme, für den Folgendes gilt:

> Sei φ eine FO[σ]-Formel. Ersetzt man in φ eine freie Variable x durch einen Term $t(y_1, \ldots, y_n)$, so sagt die dadurch entstehende Formel φ' über den Term $t(y_1, \ldots, y_n)$ dasselbe aus wie die Formel φ über die Variable x.

Beispiel 0.34

Betrachte die $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel

$$\varphi(v_0) \;:=\; \exists v_1\; v_1 + v_1 = v_0,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_0 eine gerade Zahl ist.

(a) Ersetzt man die Variable v_0 durch die Variable v_5, so erhält man die Formel

$$\psi(v_5) \;=\; \exists v_1\; v_1 + v_1 = v_5,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_5 gerade ist.

Beispiel 0.34

Betrachte die FO[σ_{Ar}]-Formel

$$\varphi(v_0) \ := \ \exists v_1 \ v_1 + v_1 = v_0,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_0 eine gerade Zahl ist.

(a) Ersetzt man die Variable v_0 durch die Variable v_5, so erhält man die Formel

$$\psi(v_5) \ = \ \exists v_1 \ v_1 + v_1 = v_5,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_5 gerade ist.

(b) Ersetzt man die Variable v_0 durch den Term $(v_0 \cdot v_0) + 1$, so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \ v_1 + v_1 = (v_0 \cdot v_0) + 1,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass $(v_0 \cdot v_0) + 1$ gerade ist.

(c) Ersetzt man aber die (gebundene) Variable v_1 durch die (freie) Variable v_0, so erhält man die Formel

$$\exists v_0 \ v_0 + v_0 = v_0.$$

Diese Formel hat eine völlig andere Bedeutung als die Formel $\varphi(v_0)$.
Daher sollte man nur freie Variablen ersetzen!

(c) Ersetzt man aber die (gebundene) Variable v_1 durch die (freie) Variable v_0, so erhält man die Formel

$$\exists v_0 \; v_0 + v_0 = v_0.$$

Diese Formel hat eine völlig andere Bedeutung als die Formel $\varphi(v_0)$.
Daher sollte man nur freie Variablen ersetzen!

(d) Ersetzt man die (freie) Variable v_0 durch v_1, so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_1,$$

die ähnlich wie in (c) eine ganz andere Bedeutung hat als die Formel $\varphi(v_0)$.
Beim Ersetzen von freien Variablen muss man daher aufpassen, dass es keine Konflikte mit gebundenen Variablen gibt! Die gebundenen Variablen werden dazu — falls nötig — umbenannt.

Definition 0.35

(a) Eine σ-**Substitution** ist eine Abbildung

$$\mathcal{S} \; : \; D \;\to\; T_\sigma,$$

wobei $D = \mathrm{Def}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{VAR}$ *endlich* ist.

(b) Für eine σ-**Substitution** $\mathcal{S}$ sei $\mathrm{var}(\mathcal{S})$ die Menge aller Variablen, die in einem Term im *Bild* von $\mathcal{S}$ vorkommen. D.h.:

$$\mathrm{var}(\mathcal{S}) \;:=\; \bigcup_{x \in \mathrm{Def}(\mathcal{S})} \mathrm{var}(\mathcal{S}(x)).$$

Definition 0.36 (Anwenden von Substitutionen auf Interpretationen)

Für jede σ-Substitution $\mathcal{S}$ und jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\text{var}(\mathcal{S}) \subseteq \text{Def}(\beta)$ sei

$$\mathcal{I}\mathcal{S} \ := \ (\mathcal{A}, \beta\mathcal{S}),$$

wobei $\beta\mathcal{S} : \text{Def}(\beta) \cup \text{Def}(\mathcal{S}) \to A$ die folgendermaßen definierte Belegung ist:

- Für alle $x \in \text{Def}(\mathcal{S})$ ist $\beta\mathcal{S}(x) := [\![\mathcal{S}(x)]\!]^{\mathcal{I}}$.
- Für alle $x \in \text{Def}(\beta) \setminus \text{Def}(\mathcal{S})$ ist $\beta\mathcal{S}(x) := \beta(x)$.

Definition 0.37 (Substitution in Termen)

Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution. Induktiv über den Aufbau von T_σ definieren wir für jedes $t \in T_\sigma$ den Term $t\mathcal{S}$, der aus t durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

- Für alle $x \in \text{VAR}$ ist

$$x\mathcal{S} \ := \ \begin{cases} \mathcal{S}(x) & \text{falls } x \in \text{Def}(\mathcal{S}) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 0.37 (Substitution in Termen)

Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution. Induktiv über den Aufbau von T_σ definieren wir für jedes $t \in T_\sigma$ den Term $t\mathcal{S}$, der aus t durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

- Für alle $x \in \mathrm{VAR}$ ist

$$x\mathcal{S} \ := \ \begin{cases} \mathcal{S}(x) & \text{falls } x \in \mathrm{Def}(\mathcal{S}) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist

$$c\mathcal{S} \ := \ c.$$

Definition 0.37 (Substitution in Termen)

Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution. Induktiv über den Aufbau von T_σ definieren wir für jedes $t \in T_\sigma$ den Term $t\mathcal{S}$, der aus t durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

- Für alle $x \in \text{VAR}$ ist
$$x\mathcal{S} \;:=\; \begin{cases} \mathcal{S}(x) & \text{falls } x \in \text{Def}(\mathcal{S}) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist
$$c\mathcal{S} \;:=\; c.$$
- Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$, für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ ist
$$f(t_1, \ldots, t_k)\mathcal{S} \;:=\; f(t_1\mathcal{S}, \ldots, t_k\mathcal{S}).$$

Lemma 0.38 (Substitutionslemma für Terme)

Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\operatorname{var}(\mathcal{S}) \subseteq \operatorname{Def}(\beta)$*.*
Für alle σ-Terme t mit $\operatorname{var}(t) \subseteq \operatorname{Def}(\beta) \cup \operatorname{Def}(\mathcal{S})$ *gilt:*

$$[\![t\mathcal{S}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; [\![t]\!]^{\mathcal{I}\mathcal{S}}.$$

Lemma 0.38 (Substitutionslemma für Terme)

Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\operatorname{var}(\mathcal{S}) \subseteq \operatorname{Def}(\beta)$.
Für alle σ-Terme t mit $\operatorname{var}(t) \subseteq \operatorname{Def}(\beta) \cup \operatorname{Def}(\mathcal{S})$ *gilt:*

$$[\![t\mathcal{S}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; [\![t]\!]^{\mathcal{I}\mathcal{S}}.$$

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Termen. Details: Übung. $\square$

Definition 0.39 (Substitution in Formeln)

Induktiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir für alle σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ und alle FO[σ]-Formeln φ die Formel $\varphi\mathcal{S}$, die aus φ durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; t_1\mathcal{S} = t_2\mathcal{S}.$$

Definition 0.39 (Substitution in Formeln)

Induktiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir für alle σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ und alle FO[σ]-Formeln φ die Formel $\varphi\mathcal{S}$, die aus φ durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \ := \ t_1\mathcal{S} = t_2\mathcal{S}.$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$ mit $R \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(R)$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \ := \ R(t_1\mathcal{S}, \ldots, t_k\mathcal{S}).$$

Definition 0.39 (Substitution in Formeln)

Induktiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir für alle σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ und alle FO[σ]-Formeln φ die Formel $\varphi\mathcal{S}$, die aus φ durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \ := \ t_1\mathcal{S} = t_2\mathcal{S}.$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$ mit $R \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(R)$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \ := \ R(t_1\mathcal{S}, \ldots, t_k\mathcal{S}).$$

- Ist φ von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so

$$\varphi\mathcal{S} \ := \ \neg\,\psi\mathcal{S}.$$

Definition 0.39 (Substitution in Formeln)

Induktiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir für alle σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ und alle FO[σ]-Formeln φ die Formel $\varphi\mathcal{S}$, die aus φ durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; t_1\mathcal{S} = t_2\mathcal{S}.$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$ mit $R \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(R)$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so

$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; R(t_1\mathcal{S}, \ldots, t_k\mathcal{S}).$$

- Ist φ von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in$ FO[σ], so

$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; \neg\,\psi\mathcal{S}.$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in$ FO[σ], $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, so

$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; (\,\psi_1\mathcal{S} \;*\; \psi_2\mathcal{S}\,).$$

- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \text{VAR}$, $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist

$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; Qy\;\psi\mathcal{S}',$$

  wobei y und $\mathcal{S}'$ wie folgt gewählt sind:
  - Sei $U := \{u \in \text{Def}(\mathcal{S}) : u \in \text{frei}(\varphi) \text{ und } u \neq \mathcal{S}(u)\}$ (insbes. ist $x \notin U$, da $x \notin \text{frei}(\varphi)$).
  - Falls $x \notin \text{var}(\mathcal{S}_{|U})$, d.h. x kommt *nicht* in $\{\mathcal{S}(u) : u \in U\}$ vor, so setze $y := x$.
  - Falls $x \in \text{var}(\mathcal{S}_{|U})$, so sei y die erste Variable in der Aufzählung $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots$ von VAR, die weder in φ noch in $\text{var}(\mathcal{S}_{|U})$ vorkommt.
  - Setze $\mathcal{S}' := \mathcal{S}_{|U} \cup \{(x,y)\}$, d.h.: $\text{Def}(\mathcal{S}') = U \cup \{x\}$, $\mathcal{S}'(x) = y$ und $\mathcal{S}'(u) = \mathcal{S}(u)$ für alle $u \in U$.

Notation 0.40

(a) Wir schreiben σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{S}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $t_i = \mathcal{S}(x_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ auch in der Form

$$\tfrac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n}.$$

Insbesondere schreiben wir für $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ auch

$$\varphi\tfrac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi\mathcal{S}.$$

(b) Für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und für Terme $t_1, \ldots, t_n$ schreiben wir auch

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi\tfrac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n}.$$

Entsprechende Schreibweisen verwenden wir auch für Terme.

Beispiel 0.41

Sei $\sigma := \{\underset{2}{f}, \underset{2}{R}\}$.

(a) Für $\varphi := R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\varphi\frac{v_2, v_0, v_1}{v_1, v_2, v_3} \;=\; R\big(v_0, f(v_2, v_0)\big).$$

Beispiel 0.41

Sei $\sigma := \{\underset{2}{f}, \underset{2}{R}\}$.

(a) Für $\varphi := R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\varphi\frac{v_2, v_0, v_1}{v_1, v_2, v_3} \;=\; R\big(v_0, f(v_2, v_0)\big).$$

(b) Für $\varphi := \exists v_0 \; R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi\frac{v_4, f(v_1, v_1)}{v_0, v_2} \;&=\; \exists v_0 \;\Big[\, R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)\frac{f(v_1, v_1), v_0}{v_2, \quad v_0}\,\Big] \\ &=\; \exists v_0 \; R\Big(v_0, f\big(v_1, f(v_1, v_1)\big)\Big). \end{aligned}$$

Beispiel 0.41

Sei $\sigma := \{\underset{2}{f}, \underset{2}{R}\}$.

(a) Für $\varphi := R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\varphi\frac{v_2, v_0, v_1}{v_1, v_2, v_3} \;=\; R\big(v_0, f(v_2, v_0)\big).$$

(b) Für $\varphi := \exists v_0\ R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi\frac{v_4, f(v_1, v_1)}{v_0, v_2} \;&=\; \exists v_0\ \Big[\, R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)\frac{f(v_1, v_1), v_0}{v_2,\quad v_0}\,\Big] \\ &=\; \exists v_0\ R\Big(v_0, f\big(v_1, f(v_1, v_1)\big)\Big).\end{aligned}$$

(c) Für $\varphi := \exists v_0\ R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi\frac{v_0, v_4}{v_1, v_0} \;&=\; \exists v_3\ \Big[\, R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)\frac{v_0, v_3}{v_1, v_0}\,\Big] \\ &=\; \exists v_3\ R\big(v_3, f(v_0, v_2)\big).\end{aligned}$$

Satz 0.42 (Substitutionslemma für Formeln)

Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{var}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Def}(\beta)$.
Für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formeln φ mit* $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(\mathcal{S})$ *gilt:*

$$\mathcal{I} \models \varphi\mathcal{S} \quad \iff \quad \mathcal{I}\mathcal{S} \models \varphi.$$

Satz 0.42 (Substitutionslemma für Formeln)

Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{var}(\mathcal{S}) \subseteq \text{Def}(\beta)$.
Für alle $\text{FO}[\sigma]$*-Formeln φ mit* $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{Def}(\beta) \cup \text{Def}(\mathcal{S})$ *gilt:*

$$\mathcal{I} \models \varphi\mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}\mathcal{S} \models \varphi.$$

Lemma 0.43

Für jeden σ-Term t, jede $\text{FO}[\sigma]$*-Formel φ und jede Variable $x \in \text{VAR}$ gilt:*
$t\frac{x}{x} = t$ *und* $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

Kapitel 1:
Der Vollständigkeitssatz

Ziel dieses Kapitels ist, ein “formales Beweissystem”, den so genannten **Sequenzenkalkül**, kennenzulernen, mit dem man alle allgemeingültigen FO-Formeln herleiten kann. Insbesondere folgt daraus dann, dass das Problem

> Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe
>
> *Eingabe:* Eine FO[σ]-Formel φ
>
> *Frage:* Gilt $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle zu φ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$?

semi-entscheidbar ist.

Abschnitt 1.1:

Beweiskalküle

Definition 1.1 (Ableitungsregel; Kalkül)

Sei M eine beliebige Menge.

(a) Eine **Ableitungsregel über** M hat die Form

$$\frac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

(b) Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als die **Voraussetzungen** der Regel $\frac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$

und b als die **Konsequenz**.
Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als **Axiome**.

(c) Ein **Kalkül** über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M.

Definition 1.2 (Ableitbare Elemente)

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M.

(a) Sei $V \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge von M. Die Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq M$ aller **aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente** ist rekursiv wie folgt definiert:

  (I) Für alle $b \in V$ ist $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

  (II) Für alle Axiome $\frac{}{b}$ in $\mathfrak{K}$ ist $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

  (III) Für alle Ableitungsregeln $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ in $\mathfrak{K}$ gilt: Wenn $a_1, \ldots, a_n \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, so auch $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

  $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ ist also die bezüglich „$\subseteq$" kleinste Teilmenge von M, die die Abschlusseigenschaften (I), (II) und (III) besitzt.
  Die Menge V wird auch **Menge der Voraussetzungen** genannt.

(b) Die Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}} := \text{abl}_{\mathfrak{K}}(\emptyset)$ ist die Menge aller **in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente**

Definition 1.3 (Ableitungen)

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine **Ableitung von** a **aus** V **in** $\mathfrak{K}$ ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt:

- $a_i \in V$ oder
- $\overline{a_i}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder
- es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{array}}{a_i}$, so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

(b) Eine **Ableitung von** a **in** $\mathfrak{K}$ ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$.

Definition 1.3 (Ableitungen)

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine **Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$** ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt:
- $a_i \in V$ oder
- $\overline{\;a_i\;}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder
- es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}}{a_i}$, so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

(b) Eine **Ableitung von a in $\mathfrak{K}$** ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$.

Beobachtung 1.4

Offensichtlich gilt:
a ist genau dann aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbar (gemäß Definition 1.2), wenn es eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ gibt (gemäß Definition 1.3).

Abschnitt 1.2:

Ein Sequenzenkalkül

Notation 1.5

- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \ldots$ bezeichnen immer σ-Terme.
- $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ bezeichnen immer FO[σ]-Formeln.
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \ldots$ bezeichnen Mengen von FO[σ]-Formeln.
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen **endliche** Mengen von FO[σ]-Formeln.
- Für $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist $\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$.

  Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}\big(\Phi \cup \{\varphi\}\big)$.
- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine **endliche** Teilmenge von M ist.

Definition 1.6 (Sequenzen)

(a) Eine **Sequenz** ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi,$$

wobei $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
Wir bezeichnen Γ als das **Antezedens** und ψ als das **Sukzedens** der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

(b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, das heißt:

$$M_S \;:=\; \big\{\Gamma \vdash \psi \;:\; \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]\big\}.$$

Definition 1.6 (Sequenzen)

(a) Eine **Sequenz** ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi,$$

wobei $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
Wir bezeichnen Γ als das **Antezedens** und ψ als das **Sukzedens** der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

(b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, das heißt:

$$M_S \ := \ \big\{ \Gamma \vdash \psi \ : \ \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}[\sigma] \big\}.$$

Notation 1.7

- Statt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
- Statt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$.

Definition 1.8

Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und sei $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
ψ **folgt aus** Φ (bzw. Φ **impliziert** ψ), kurz $\Phi \models \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu ψ und zu allen $\varphi \in \Phi$ passen, gilt: falls für alle $\varphi \in \Phi$ gilt $\mathcal{I} \models \varphi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Definition 1.8

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und sei $\psi \in \text{FO}[\sigma]$.
ψ **folgt aus** Φ (bzw. Φ **impliziert** ψ), kurz $\Phi \models \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu ψ und zu allen $\varphi \in \Phi$ passen, gilt: falls für alle $\varphi \in \Phi$ gilt $\mathcal{I} \models \varphi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation 1.9

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I}$ eine σ-Interpretation.

- Wir sagen $\mathcal{I}$ **passt zu** Φ, falls $\mathcal{I}$ zu jedem $\varphi \in \Phi$ passt.
- $\mathcal{I} \models \Phi$ (in Worten: $\mathcal{I}$ **erfüllt** Φ) $:\iff$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Definition 1.10 (Korrekte Sequenzen und Sequenzenregeln)

(a) Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt **korrekt**, wenn gilt: $\Gamma \models \psi$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt **korrekt**, wenn Folgendes gilt: Sind die Sequenzen $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ korrekt, so ist auch die Sequenz $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ korrekt.

Die folgende Definition führt einen Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen ein, den sogenannten **Sequenzenkalkül** $\mathfrak{K}_S$. Im Verlauf von Kapitel 1 werden wir sehen, dass Folgendes gilt:

(a) Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathfrak{K}_S$ besteht, sind korrekt. Daraus folgt dann, dass auch alle in $\mathfrak{K}_S$ ableitbaren Sequenzen korrekt sind.

(b) Ist $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \models \psi$, dann gibt es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Die Eigenschaften (a) und (b) werden **Korrektheit** bzw. **Vollständigkeit** des Kalküls $\mathfrak{K}_S$ genannt. Der Einfachheit halber werden wir nur Formeln betrachten, in denen keins der Symbole $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vorkommt.

Definition 1.11 (Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$)

Der **Sequenzekalkül** $\mathfrak{K}_S$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der aus den folgenden Ableitungsregeln besteht — für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $t, u \in T_\sigma$, $x, y \in \mathrm{VAR}$:

Definition 1.11 (Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$)

Der **Sequenzekalkül** $\mathfrak{K}_S$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der aus den folgenden Ableitungsregeln besteht — für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $t, u \in T_\sigma$, $x, y \in \mathrm{VAR}$:

Grundregeln

- Voraussetzungsregel (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \ \vdash \varphi}$$

- Erweiterungsregel (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Aussagenlogische Regeln

- Fallunterscheidungsregel (FU):

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

- Widerspruchsregel (W):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\text{für alle } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma])$$

- $\wedge$-Einführung im Antezedens ($\wedge\mathrm{A}_1$), ($\wedge\mathrm{A}_2$):

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\psi \wedge \varphi) \vdash \chi}$$

- $\wedge$-Einführung im Sukzedens ($\wedge$S):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

- $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A):

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \varphi \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

- $\vee$-Einführung im Sukzedens ($\vee S_1$), ($\vee S_2$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$$

Quantorenregeln

- $\forall$-Einführung im Antezedens ($\forall$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-Einführung im Sukzedens ($\forall$S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$$

- $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$$

- $\exists$-Einführung im Sukzedens ($\exists$S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

Gleichheitsregeln

- Reflexivität der Gleichheit (G):

$$\frac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

- Substitutionsregel (S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t{=}u \;\vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

Beispiel 1.12

(a) Für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist $\emptyset \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)	φ	$\vdash$	φ	(V)
(2)	φ	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S$_1$) auf (1) angewendet
(3)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(4)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S$_2$) auf (3) angewendet
(5)	$\emptyset$	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(FU) auf (2), (4) angewendet.

(b) $R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x) \ \vdash R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ ist ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)	$R\big(f(x)\big)$	$\vdash$	$R\big(f(x)\big)$	(V)
(2)	$R\big(f(x)\big), x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	(S) auf (1) mit $t{:=}x$, $u{:=}f(x)$
(3)	$R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	($\forall$A) auf (2) mit $t{:=}x$.

Satz 1.13 (Korrekheit des Sequenzenkalküls)

Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathfrak{K}_S$ besteht, sind korrekt; und jede in $\mathfrak{K}_S$ ableitbare Sequenz ist korrekt.

Definition 1.14 (Beweisbarkeit)

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$. Die Formel φ ist **beweisbar** aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Ein **Beweis** von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$.

Definition 1.14 (Beweisbarkeit)

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Die Formel φ ist **beweisbar** aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Ein **Beweis** von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$.

Aus Satz 1.13 folgt direkt:

Korollar 1.15

Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt: Falls* $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$, *so* $\Phi \models \varphi$.
Das heißt: Falls φ *aus* Φ *beweisbar ist, so folgt* φ *semantisch aus* Φ.

Definition 1.14 (Beweisbarkeit)

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$. Die Formel φ ist **beweisbar** aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Ein **Beweis** von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$.

Aus Satz 1.13 folgt direkt:

Korollar 1.15

Für alle $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$, so $\Phi \models \varphi$.
Das heißt: Falls φ aus Φ beweisbar ist, so folgt φ semantisch aus Φ.

Unser Ziel im Rest von Kapitel 1 ist, zu zeigen, dass auch die Umkehrung von Korollar 1.15 gilt, das heißt: Für alle $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi.$$

Abschnitt 1.3:

Ableitbare Regeln im Sequenzenkalkül

Definition 1.16

Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt **ableitbar (in $\mathfrak{K}_S$)**, wenn $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ aus der Menge $V := \big\{\Gamma_i \vdash \varphi_i \ : \ i \in \{1, \ldots, k\}\big\}$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Definition 1.16

Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \text{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt **ableitbar (in $\mathfrak{K}_S$)**, wenn $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ aus der Menge $V := \big\{\Gamma_i \vdash \varphi_i \ : \ i \in \{1, \dots, k\}\big\}$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Lemma 1.17

Sei $\mathfrak{K}_S{}'$ eine Erweiterung des Sequenzenkalküls $\mathfrak{K}_S$ um eine oder mehrere ableitbare Sequenzenregeln. Dann ist eine Sequenz S genau dann in $\mathfrak{K}_S{}'$ ableitbar, wenn sie in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Lemma 1.18 (Ableitbare aussagenlogische Sequenzenregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ *und* $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *ableitbar:*

- *Kettenschlussregel (KS):*

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- *Disjunktiver Syllogismus (DS):*

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \neg\varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- *Modus Ponens (MP):*

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Kontrapositionsregeln (KP):
  - $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$$
  - $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi}$$
  - $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}$$
  - $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

Lemma 1.19 (Ableitbare Quantorenregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$*, alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle* $x \in \mathrm{VAR}$ *ableitbar:*

Quantorenaustauschregeln (QA):

1) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\ \neg\varphi}$$

2) $$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\forall x\ \varphi}$$

3) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\exists x\ \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\ \neg\varphi}$$

4) $$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\exists x\ \varphi}$$

Lemma 1.20 (Ableitbare Gleichheitsregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar — für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$*, für alle* $t, u, t_1, u_1, t_2, u_2, \dots \in T_\sigma$*:*

- *Symmetrie der Gleichheit (SG):*

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}$$

- *Transitivität der Gleichheit (TG):*

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash t_1 = t_2 \\ \Gamma \vdash t_2 = t_3\end{array}}{\Gamma \vdash t_1 = t_3}$$

- *Verträglichkeitsregeln für die Gleichheit:*

(VR): Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $r := \text{ar}(R)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_r) \\ \Gamma \vdash t_1 = u_1 \\ \quad\vdots \\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash R(u_1, \ldots, u_r)}$$

(VF): Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$ und für $r := \text{ar}(f)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = u_1 \\ \quad\vdots \\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash f(t_1, \ldots, t_r) = f(u_1, \ldots, u_r)}$$

Abschnitt 1.4:

Widerspruchsfreiheit und das syntaktische Endlichkeitslemma

Definition 1.21 (Widerspruchsfreiheit)

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **widerspruchsvoll**, falls es ein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$.
Das heißt: Φ ist widerspruchsvoll, falls sich im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ein Widerspruch herleiten lässt.

(b) Φ heißt **widerspruchsfrei**, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist.

Definition 1.21 (Widerspruchsfreiheit)

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **widerspruchsvoll**, falls es ein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$.
Das heißt: Φ ist widerspruchsvoll, falls sich im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ein Widerspruch herleiten lässt.

(b) Φ heißt **widerspruchsfrei**, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist.

Definition 1.22 (Erfüllbarkeit)

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ heißt **erfüllbar**, falls es eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$ gibt.

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls (Korollar 1.15) folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 1.23

Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt: Falls* Φ *erfüllbar ist, so ist* Φ *widerspruchsfrei.*

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls (Korollar 1.15) folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 1.23

Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt: Falls Φ erfüllbar ist, so ist Φ widerspruchsfrei.

Beweis: Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine zu Φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$.
Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll. Dann gibt es gemäß Definition 1.21 ein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Aus Korollar 1.15 folgt, dass $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$.
Natürlich können wir den Definitionsbereich von β so erweitern, dass $\mathcal{I}$ zu φ passt. Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$ gilt dann: $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$.
$\lightning$

$\square$

Lemma 1.24

Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*

(a) Φ *ist widerspruchsvoll* $\iff$ *für alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt* $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *es gibt ein* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, *so dass* $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.[1]

(c) Φ *ist widerspruchsvoll* $\iff$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$.

[1] Notation: Wir schreiben $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$, um auszudrücken, dass nicht $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ gilt.

Lemma 1.25

Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *und alle* $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ *gilt:*

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *ist widerspruchsvoll.*

(b) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi \iff \Phi \cup \{\varphi\}$ *ist widerspruchsvoll.*

(c) *Falls* Φ *widerspruchsfrei ist, so ist auch mindestens eine der beiden Mengen* $\Phi \cup \{\varphi\}$ *und* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *widerspruchsfrei.*

Lemma 1.26 (Das syntaktische Endlichkeitslemma)

Für jedes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*
Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *jedes* $\Gamma \subseteq_e \Phi$ *ist widerspruchsfrei.*

Lemma 1.26 (Das syntaktische Endlichkeitslemma)

Für jedes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*
Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *jedes* $\Gamma \subseteq_e \Phi$ *ist widerspruchsfrei.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“ : Angenommen, $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 1.24 (c) gilt dann $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Nach Definition 1.14 gilt dann auch $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 1.24 (c) ist Φ somit widerspruchsvoll. $\lightning$

Lemma 1.26 (Das syntaktische Endlichkeitslemma)

Für jedes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*
Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *jedes* $\Gamma \subseteq_e \Phi$ *ist widerspruchsfrei.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“ : Angenommen, $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 1.24 (c) gilt dann $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \, \neg v_0{=}v_0$. Nach Definition 1.14 gilt dann auch $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \, \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 1.24 (c) ist Φ somit widerspruchsvoll. $\lightning$

„$\Longleftarrow$“ : Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.
Lemma 1.24 (c) ergibt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \, \neg v_0 = v_0$. Gemäß Definition 1.14 gibt es daher ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0 \, \neg v_0 = v_0$. Lemma 1.24 (c) ergibt wiederum, dass Γ widerspruchsvoll ist. $\lightning$

$\square$

Abschnitt 1.5:

Der Vollständigkeitssatz

Satz 1.27 (Der Vollständigkeitssatz)

Für alle Signaturen σ, *alle Formelmengen* $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *und alle Formeln* $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ *gilt:*

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Satz 1.27 (Der Vollständigkeitssatz)

Für alle Signaturen σ, alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel für den Beweis des Vollständigkeitssatzes.

Lemma 1.28 (Erfüllbarkeitslemma)

Für alle Signaturen σ gilt: Jede widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Beweis von Satz 1.27 (Vollständigkeitssatz):

(b) „$\Longrightarrow$“ : Dies ist gerade die Aussage des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 1.28).
„$\Longleftarrow$“ : Korollar 1.23 (einfache Folgerung aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls).

(a) „$\Longrightarrow$“ : Korollar 1.15 (Korrektheit des Sequenzenkalküls).
„$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \models \varphi$. Angenommen, $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.
Aus Lemma 1.25 (a) folgt dann, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei und gemäß Erfüllbarkeitslemma also auch erfüllbar ist. Das heißt, es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Somit gilt $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$.
Laut Voraussetzung gilt aber $\Phi \models \varphi$ und daher gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. ↯

$\square$

Definition 1.29 (Termstruktur $\mathcal{A}_\Phi$ und Terminterpretation $\mathcal{I}_\Phi$)

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Die σ-Struktur $\mathcal{A}_\Phi$ ist folgendermaßen definiert

- $A_\Phi \ := \ T_\sigma$ (das heißt: das Universum von $\mathcal{A}_\Phi$ besteht aus der Menge aller σ-Terme).
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{\mathcal{A}_\Phi} := c$.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist
$$f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k) \ := \ f(t_1, \ldots, t_k).$$
- Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ ist
$$R^{\mathcal{A}_\Phi} \ := \ \big\{(t_1, \ldots, t_k) \in T_\sigma^k : \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k)\big\}.$$

Die Struktur $\mathcal{A}_\Phi$ heißt **Termstruktur** von Φ.

(b) Die Belegung $\beta_\Phi \colon \mathrm{VAR} \to A_\Phi$ ist definiert durch
$$\beta_\Phi(x) \ := \ x, \text{ für alle } x \in \mathrm{VAR}.$$

(c) Die σ-Interpretation $\mathcal{I}_\Phi := (\mathcal{A}_\Phi, \beta_\Phi)$ heißt **Terminterpretation** von Φ.

Beobachtung 1.30

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = t$.

(b) Für alle $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ gilt:

$$\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \ldots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k).$$

Beobachtung 1.30

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = t$.

(b) Für alle $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ gilt:

$$\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \ldots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k).$$

Beobachtung 1.31

Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt $\mathcal{I}_\Phi \not\models t_1 = t_2$.
Somit gilt: Falls es Terme t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} t_1 = t_2$, so ist $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$.
Ziel: Modifiziere $\mathcal{I}_\Phi$ so zu einer σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$, dass für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Definition 1.32 (Kongruenzrelation $\sim$ auf T_σ)

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die zweistellige Relation $\sim_\Phi$ auf T_σ sei folgendermaßen definiert. Für alle $t, u \in T_\sigma$ gilt:

$$t \sim_\Phi u \quad :\Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} t = u.$$

Definition 1.32 (Kongruenzrelation $\sim$ auf T_σ)

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die zweistellige Relation $\sim_\Phi$ auf T_σ sei folgendermaßen definiert. Für alle $t, u \in T_\sigma$ gilt:

$$t \sim_\Phi u \quad :\iff \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} t = u.$$

Lemma 1.33

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) *Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine **Äquivalenzrelation** auf T_σ.*

(b) *Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1, \ldots, t_k \sim_\Phi u_k$ gilt:*

$$f(t_1, \ldots, t_k) \ \sim_\Phi \ f(u_1, \ldots, u_k).$$

(c) *Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1, \ldots, t_k \sim_\Phi u_k$ gilt:*

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(u_1, \ldots, u_k).$$

Korollar 1.34

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine ***Kongruenzrelation*** *auf $\mathcal{A}_\Phi$, das heißt es gilt:*

(a) *$\sim_\Phi$ ist eine Äquivalenzrelation auf A_Φ.*

(b) *Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ gilt:*

$$f^{\mathcal{A}_\Phi}(a_1, \ldots, a_k) \ \sim_\Phi \ f^{\mathcal{A}_\Phi}(b_1, \ldots, b_k).$$

(c) *Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ gilt:*

$$\mathcal{A}_\Phi \models R(a_1, \ldots, a_k) \iff \mathcal{A}_\Phi \models R(b_1, \ldots, b_k).$$

Definition 1.35 (Die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$, die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$)

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Für jedes $t \in T_\sigma$ sei

$$[t]_\Phi \;:=\; \{u \in T_\sigma : t \sim_\Phi u\}$$

die **Äquivalenzklasse** von t bezüglich $\sim_\Phi$ in T_σ.

(b) Die σ-Struktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ sei folgendermaßen definiert

(I) Das Universum von $[\mathcal{A}_\Phi]$ ist die Menge

$$[A_\Phi] \;:=\; \{\ [t]_\Phi \;:\; t \in T_\sigma\ \}$$

(das heißt: $[A_\Phi]$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von σ-Termen).

(II) Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{[\mathcal{A}_\Phi]} := [c]_\Phi$.

(III) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ ist

$$R^{[\mathcal{A}_\Phi]} \;:=\; \Big\{ \big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi\big) : (t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathcal{A}_\Phi} \Big\}.$$

(IV) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$f^{[\mathcal{A}_\Phi]}\Big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi\Big) \;:=\; \big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k)\big]_\Phi.$$

Beachte

Dies ist **wohldefiniert**, da gemäß Korollar 1.34 (b) für alle $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $[t_1]_\Phi = [u_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi = [u_k]_\Phi$ gilt:

$$\big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k)\big]_\Phi \;=\; \big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(u_1, \ldots, u_k)\big]_\Phi.$$

Die σ-Struktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ heißt **reduzierte Termstruktur** von Φ.

(c) Die Belegung $[\beta_\Phi]$: $\text{VAR} \to [A_\Phi]$ ist für alle $x \in \text{VAR}$ definiert durch

$$[\beta_\Phi](x) \;:=\; \big[\beta_\Phi(x)\big]_\Phi \;=\; [x]_\Phi.$$

(c) Die σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi] := \big([\mathcal{A}_\Phi], [\beta_\Phi]\big)$ heißt **reduzierte Terminterpretation** von Φ.

Lemma 1.36

(a) *Für alle* $t \in T_\sigma$ *gilt:* $[\![t]\!]^{[\mathcal{I}_\Phi]} = [t]_\Phi$.

(b) *Für alle* ***atomaren*** FO[σ]*-Formeln* φ *gilt:* $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Definition 1.37

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **negationstreu**, wenn für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi.$$

(b) Φ **enthält Beispiele**, wenn für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$ (mit $x \in \mathrm{VAR}$ und $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$) gilt: Es gibt einen Term $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \ \vdash_{\mathfrak{K}_S} \ \left(\exists x\, \varphi \ \rightarrow \ \varphi\tfrac{t}{x}\right).$$

Definition 1.37

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **negationstreu**, wenn für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi.$$

(b) Φ **enthält Beispiele**, wenn für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$ (mit $x \in \mathrm{VAR}$ und $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$) gilt: Es gibt einen Term $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \;\vdash_{\mathfrak{K}_S}\; \left(\exists x\, \varphi \;\rightarrow\; \varphi\tfrac{t}{x}\right).$$

Satz 1.38 (Der Satz von Henkin)

Sei σ eine Signatur. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält. Dann gilt für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Beachte: *Daraus folgt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \Phi$.*

Lemma 1.39

*Sei σ eine **abzählbare** Signatur, und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge bei der*

$$\text{die Menge } \mathrm{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Phi) \text{ unendlich ist.} \tag{1}$$

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

Lemma 1.39

*Sei σ eine **abzählbare** Signatur, und sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge bei der*

$$\textit{die Menge}\ \ \mathsf{VAR} \setminus \mathsf{frei}(\Phi)\ \ \textit{unendlich ist.} \tag{1}$$

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

Lemma 1.40

*Sei σ eine **abzählbare** Signatur, und sei $\Psi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge. Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \supseteq \Psi$, die negationstreu ist.*

Lemma 1.41 (Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen)

Sei σ eine ***abzählbare*** *Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge.*
Dann ist Φ erfüllbar.

Beweis des Vollständigkeitssatzes für beliebige Signaturen

Notation 1.42

- Für eine Signatur σ schreiben wird $\mathfrak{K}_\sigma$, um den bezüglich σ definierten Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ zu bezeichnen.
- Sind σ und $\hat{\sigma}$ Signaturen mit $\sigma \subseteq \hat{\sigma}$ und ist $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, so heißt Φ **widerspruchsvoll bezüglich** $\hat{\sigma}$, falls es eine FO[$\hat{\sigma}$]-Formel φ gibt, so dass

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \varphi \quad \text{und} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \neg\varphi.$$

- Φ heißt **widerspruchsfrei bezüglich** $\hat{\sigma}$, falls Φ nicht widerspruchsvoll bezüglich $\hat{\sigma}$ ist.

Lemma 1.39'

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die bezüglich σ widerspruchsfrei ist. Dann gibt es eine Signatur $\hat{\sigma} \supseteq \sigma$ und eine Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$, für die gilt:

(1) $\Phi \subseteq \Psi$

(2) Ψ *ist widerspruchsfrei bezüglich* $\hat{\sigma}$.

(3) Ψ *enthält Beispiele bezüglich* $\hat{\sigma}$, *das heißt für jede* $\mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$*-Formel der Form* $\exists x\varphi$ *(mit* $x \in \mathrm{VAR}$ *und* $\varphi \in \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$*) gibt es einen Term* $t \in T_{\hat{\sigma}}$*, so dass* $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \left(\exists x\varphi \rightarrow \varphi\frac{t}{x}\right)$.

Lemma 1.40'

Sei $\hat{\sigma}$ eine Signatur und sei $\Psi \subseteq \mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$ eine bezüglich $\hat{\sigma}$ widerspruchsfreie Formelmenge. Dann gibt es eine Formelmenge Θ mit $\Psi \subseteq \Theta \subseteq \mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$, die bezüglich $\hat{\sigma}$ widerspruchsfrei und negationstreu ist.

Klar: Falls Ψ bezüglich $\hat{\sigma}$ Beispiele enthält, so auch Θ.

Bevor wir Lemma 1.40' beweisen, schließen wir zunächst den Beweis des Erfüllbarkeitslemmas und des Vollständigkeitssatzes für beliebige Signaturen ab.

Lemma 1.28 (Erfüllbarkeitslemma)

Für alle Signaturen σ *gilt: Jede widerspruchsfreie Formelmenge* $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *ist erfüllbar.*

Wie zu Beginn des Kapitels bereits gesehen, folgt aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls und aus dem Erfüllbarkeitslemma der

Satz 1.27 (Der Vollständigkeitssatz)

Für alle Signaturen σ, alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch Lemma 1.40' beweisen. Zum Beweis von Lemma 1.40' nutzen wir das **Zornsche Lemma**. Als Hinführung zum Zornschen Lemma hier ein kleiner Exkurs.

Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz und Zornsches Lemma

Auswahlaxiom (AC)

Zu jeder Menge Y von nicht-leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Menge Y', die von jedem Element aus Y genau ein Element enthält. Eine solche Menge Y' wird auch **Auswahlmenge zu** Y genannt.

Auswahlaxiom (AC)

Zu jeder Menge Y von nicht-leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Menge Y', die von jedem Element aus Y genau ein Element enthält. Eine solche Menge Y' wird auch **Auswahlmenge zu Y** genannt.

Man sieht leicht, dass das Auswahlaxiom äquivalent ist zu folgenden Aussage.

Auswahlfunktionen auf Potenzmengen $(*)$

Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer jeden nicht-leeren Menge M gibt es eine Auswahlfunktion, d. h. eine Funktion $f : \mathcal{P}(M) \to M$, die folgende Eigenschaft hat: Für alle $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ ist $f(X) \in X$.

(Das heißt: f ordnet via $x := f(X)$ jeder nicht-leeren Menge $X \subseteq M$ einen **Repräsentanten** $x \in X$ zu.)

Lemma 1.43

Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu der Aussage $(*)$.

Wohlordnungssatz (WOS)

Jede nicht-leere Menge M lässt sich **wohlordnen**, das bedeutet es gibt eine 2-stellige Relation $\prec \subseteq M \times M$, so dass $(M, \prec)$ eine **Wohlordnung** ist.

Definition 1.44 (Wohlordnung)

Sei M eine Menge und sei $\prec \subseteq M \times M$. Die Struktur $(M, \prec)$ heißt **Wohlordnung**, falls gilt:

(1) $(M, \prec)$ ist eine **strikte lineare Ordnung**, das heißt es gilt

   (i) $\prec$ ist irreflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \notin \prec$.

   (ii) $\prec$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \prec b$ und $b \prec c$ ist auch $a \prec c$.

   (iii) $\prec$ ist konnex, das heißt für alle $a, b \in M$ ist $a \prec b$ oder $a = b$ oder $b \prec a$.

Definition 1.44 (Wohlordnung)

Sei M eine Menge und sei $\prec \subseteq M \times M$. Die Struktur $(M, \prec)$ heißt **Wohlordnung**, falls gilt:

(1) $(M, \prec)$ ist eine **strikte lineare Ordnung**, das heißt es gilt

- (i) $\prec$ ist irreflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \notin \prec$.
- (ii) $\prec$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \prec b$ und $b \prec c$ ist auch $a \prec c$.
- (iii) $\prec$ ist konnex, das heißt für alle $a, b \in M$ ist $a \prec b$ oder $a = b$ oder $b \prec a$.

Beachte

Aus (i) und (ii) folgt, dass $\prec$ antisymmetrisch ist, das heißt für alle $a, b, \in M$ mit $a \prec b$ ist $(b, a) \notin \prec$.

Definition 1.44 (Wohlordnung)

Sei M eine Menge und sei $\prec \subseteq M \times M$. Die Struktur $(M, \prec)$ heißt **Wohlordnung**, falls gilt:

(1) $(M, \prec)$ ist eine **strikte lineare Ordnung**, das heißt es gilt

  (i) $\prec$ ist irreflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \notin \prec$.

  (ii) $\prec$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \prec b$ und $b \prec c$ ist auch $a \prec c$.

  (iii) $\prec$ ist konnex, das heißt für alle $a, b \in M$ ist $a \prec b$ oder $a = b$ oder $b \prec a$.

Beachte

Aus (i) und (ii) folgt, dass $\prec$ antisymmetrisch ist, das heißt für alle $a, b, \in M$ mit $a \prec b$ ist $(b, a) \notin \prec$.

(2) $(M, \prec)$ ist **fundiert**, das heißt Jede nicht-leere Menge $X \subseteq M$ enthält eine bezüglich $\prec$ in X kleinstes Element, das heißt ein $x_0 \in X$, so dass es kein $x' \in X$ gibt mit $x' \prec x_0$.

Definition 1.44 (Wohlordnung)

Sei M eine Menge und sei $\prec \subseteq M \times M$. Die Struktur $(M, \prec)$ heißt **Wohlordnung**, falls gilt:

(1) $(M, \prec)$ ist eine **strikte lineare Ordnung**, das heißt es gilt

- (i) $\prec$ ist irreflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \notin \prec$.
- (ii) $\prec$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \prec b$ und $b \prec c$ ist auch $a \prec c$.
- (iii) $\prec$ ist konnex, das heißt für alle $a, b \in M$ ist $a \prec b$ oder $a = b$ oder $b \prec a$.

Beachte

Aus (i) und (ii) folgt, dass $\prec$ antisymmetrisch ist, das heißt für alle $a, b, \in M$ mit $a \prec b$ ist $(b, a) \notin \prec$.

(2) $(M, \prec)$ ist **fundiert**, das heißt Jede nicht-leere Menge $X \subseteq M$ enthält eine bezüglich $\prec$ in X kleinstes Element, das heißt ein $x_0 \in X$, so dass es kein $x' \in X$ gibt mit $x' \prec x_0$.

Beachte

Wegen (1) gilt also für alle $x' \in X$ mit $x' \neq x_0$, dass $x_0 \prec x'$.

Definition 1.45 (Halbordnung)

Sei M eine Menge und sei $\preceq \subseteq M \times M$.

(a) Die Struktur $(M, \preceq)$ heißt **Halbordnung**, falls gilt:

  (i) $\preceq$ ist reflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \in \preceq$.

  (ii) $\preceq$ ist antisymmetrisch, das heißt für alle $a, b \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq a$ ist $b = a$.

  (iii) $\preceq$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq c$ ist auch $a \preceq c$.

Definition 1.45 (Halbordnung)

Sei M eine Menge und sei $\preceq \subseteq M \times M$.

(a) Die Struktur $(M, \preceq)$ heißt **Halbordnung**, falls gilt:

  (i) $\preceq$ ist reflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \in \preceq$.

  (ii) $\preceq$ ist antisymmetrisch, das heißt für alle $a, b \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq a$ ist $b = a$.

  (iii) $\preceq$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq c$ ist auch $a \preceq c$.

(b) Sei $(M, \preceq)$ eine Halbordnung.

- Eine **Kette in** $(M, \preceq)$ ist eine Menge $K \subseteq M$, so dass für alle Elemente $a, b \in K$ gilt: $a \preceq b$ oder $b \preceq a$. (das heißt alle Elemente in K sind bzgl. $\preceq$ miteinander vergleichbar)
- Ein Element $a \in M$ ist eine **obere Schranke einer Kette** K **in** $(M, \preceq)$, wenn für alle $b \in K$ gilt $b \preceq a$.

Definition 1.45 (Halbordnung)

Sei M eine Menge und sei $\preceq \subseteq M \times M$.

(a) Die Struktur $(M, \preceq)$ heißt **Halbordnung**, falls gilt:

  (i) $\preceq$ ist reflexiv, das heißt für alle $a \in M$ ist $(a, a) \in \preceq$.

  (ii) $\preceq$ ist antisymmetrisch, das heißt für alle $a, b \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq a$ ist $b = a$.

  (iii) $\preceq$ ist transitiv, das heißt für alle $a, b, c \in M$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq c$ ist auch $a \preceq c$.

(b) Sei $(M, \preceq)$ eine Halbordnung.

  - Eine **Kette in** $(M, \preceq)$ ist eine Menge $K \subseteq M$, so dass für alle Elemente $a, b \in K$ gilt: $a \preceq b$ oder $b \preceq a$. (das heißt alle Elemente in K sind bzgl. $\preceq$ miteinander vergleichbar)
  - Ein Element $a \in M$ ist eine **obere Schranke einer Kette** K **in** $(M, \preceq)$, wenn für alle $b \in K$ gilt $b \preceq a$.

(c) Sei $(M, \preceq)$ eine Halbordnung. Ein **maximales Element in** $(M, \preceq)$ ist ein Element $a \in M$, so dass es kein $b \in M$ mit $a \preceq b$ und $a \neq b$ gibt.

Zornsches Lemma

Für jede Halbordnung $(M, \preceq)$ gilt: Falls jede Kette K in $(M, \preceq)$ eine obere Schranke in M hat, so besitzt $(M, \preceq)$ ein maximales Element.

Kapitel 2:

Der Endlichkeitssatz und die Sätze von Löwenheim und Skolem

Abschnitt 2.1:

Der Endlichkeitssatz

Satz 2.1 (Endlichkeitssatz bzw. Kompaktheitssatz)

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge. Dann gilt:

(a) *Φ ist erfüllbar $\iff$ Jede **endliche** Teilmenge von Φ ist erfüllbar.*

(b) *Für jedes $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \iff \quad \textit{Es gibt eine } \textbf{\textit{endliche}} \textit{ Menge } \Gamma \subseteq \Phi \ \textit{ mit } \ \Gamma \models \psi.$$

Beweis:

(a)

$$
\begin{aligned}
\Phi \text{ erfüllbar} \quad & \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \quad \Phi \text{ widerspruchsfrei} \\
& \underset{\substack{\text{Lemma 1.26} \\ \text{(Syntakt. Endlichkeitslemma)}}}{\iff} \quad \text{Jede endl. Teilmenge von } \Phi \text{ ist widerspruchsfrei.} \\
& \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \quad \text{Jede endliche Teilmenge von } \Phi \text{ ist erfüllbar.}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\Phi \models \psi \quad & \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi \\
& \iff \quad \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi, \text{ so dass } \Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi \\
& \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \quad \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi, \text{ so dass } \Gamma \models \psi.
\end{aligned}
$$

$\square$

Definition 2.2 (Modellklassen und Axiomatisierbarkeit)

Sei σ eine Signatur.

(a) Für eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen sei

$$\mathrm{MOD}_\sigma(\Phi) \;:=\; \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \Phi\}$$

die **Modellklasse** von Φ bezüglich σ.

Definition 2.2 (Modellklassen und Axiomatisierbarkeit)

Sei σ eine Signatur.

(a) Für eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen sei

$$\mathrm{MOD}_\sigma(\Phi) \ := \ \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \Phi\}$$

die **Modellklasse** von Φ bezüglich σ.

(b) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt (erststufig) **axiomatisierbar** (oder **Δ-elementar**), wenn es eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathrm{MOD}_\sigma(\Phi)$.

Definition 2.2 (Modellklassen und Axiomatisierbarkeit)

Sei σ eine Signatur.

(a) Für eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen sei

$$\mathrm{MOD}_\sigma(\Phi) \ := \ \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \Phi\}$$

die **Modellklasse** von Φ bezüglich σ.

(b) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt (erststufig) **axiomatisierbar** (oder **Δ-elementar**), wenn es eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathrm{MOD}_\sigma(\Phi)$.

(c) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt **endlich axiomatisierbar** (oder **elementar**), wenn es eine **endliche** Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathrm{MOD}_\sigma(\Phi)$.

Beobachtung 2.3

$\mathcal{K}$ ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn es einen FO[σ]-Satz φ mit $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\{\varphi\})$ gibt.

Beobachtung 2.3

$\mathcal{K}$ ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn es einen FO[σ]-Satz φ mit $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\{\varphi\})$ gibt.

Korollar 2.4

Für jede Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen gilt:

$$\mathcal{K} \text{ ist elementar} \quad \iff \quad \mathcal{K}^{\mathsf{C}} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \notin \mathcal{K}\} \text{ ist endlich axiomatisierbar.}$$

Definition 2.5 (Mächtigkeit von Mengen)

Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig** (kurz: $A \sim B$), wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **höchstens so mächtig** wie B (kurz: $A \preccurlyeq B$) und B heißt **mindestens so mächtig** wie A, wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **schmächtiger** (oder: **weniger mächtig**) als B (kurz: $A \prec B$), wenn es eine injektive, aber keine bijektive Abbildung von A nach B gibt.

Definition 2.5 (Mächtigkeit von Mengen)

Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig** (kurz: $A \sim B$), wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **höchstens so mächtig** wie B (kurz: $A \preccurlyeq B$) und B heißt **mindestens so mächtig** wie A, wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **schmächtiger** (oder: **weniger mächtig**) als B (kurz: $A \prec B$), wenn es eine injektive, aber keine bijektive Abbildung von A nach B gibt.

Definition 2.6

Die **Mächtigkeit** einer σ-Struktur ist die Mächtigkeit ihres Universums.
Wir bezeichnen eine Menge M als **abzählbar**, wenn sie entweder endlich ist oder dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt. Eine Menge M heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.
Eine Struktur ist endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit besitzt.

Satz 2.7

Für jede Signatur σ ist die Klasse aller ***unendlichen*** *σ-Strukturen axiomatisierbar.*

Lemma 2.8

Sei σ eine Signatur.
Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, für die Folgendes gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant n$ und eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $|A| = m$ und $\mathcal{A} \models \Phi$ (d.h. Φ besitzt beliebig große endliche Modelle). Dann besitzt Φ auch ein unendliches Modell, d.h., es gibt eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $|B| = \infty$ und $\mathcal{B} \models \Phi$.

Satz 2.9 (Nicht-Axiomatisierbarkeit der Endlichkeit)

Für jede Signatur σ gilt:

(a) *Die Klasse aller* ***endlichen*** *σ-Strukturen ist* ***nicht*** *axiomatisierbar.*

(b) *Die Klasse aller* ***unendlichen*** *σ-Strukturen ist* ***nicht*** *endlich axiomatisierbar.*

Satz 2.10 (Nicht-Axiomatisierbarkeit von Graph-Zusammenhang)

Die Klasse

$$\mathrm{ZG} := \{\, G = (V, E^G) \,:\, V \text{ ist eine Menge, } E^G \subseteq V \times V \text{ und f.a. } a, b \in V \text{ gibt es in } E^G \text{ einen Weg endlicher Länge von } a \text{ nach } b \,\}$$

aller stark zusammenhängenden (endlichen oder unendlichen) gerichteten Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Abschnitt 2.2:

Die Sätze von Löwenheim und Skolem

Satz 2.11 (Der Satz von Löwenheim und Skolem)

Sei σ eine Signatur.
*Jede **abzählbare**, erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ besitzt ein abzählbares Modell.*

Satz 2.11 (Der Satz von Löwenheim und Skolem)

Sei σ eine Signatur.
*Jede **abzählbare**, erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ besitzt ein abzählbares Modell.*

Korollar 2.12

Sei σ eine abzählbare Signatur.
*Dann ist die Klasse aller **überabzählbaren** σ-Strukturen nicht axiomatisierbar.*

Satz 2.13 (Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem)

Sei σ *eine Signatur.*
Jede erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *besitzt ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß ist wie die Mächtigkeit von* $\mathrm{FO}[\sigma]$.

Satz 2.13 (Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem)

Sei σ eine Signatur.
Jede erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ besitzt ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß ist wie die Mächtigkeit von $\mathrm{FO}[\sigma]$.

Satz 2.14 (Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem)

*Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Dann gibt es zu **jeder** Menge M ein Modell von Φ, dessen Mächtigkeit mindestens so groß wie die Mächtigkeit von M ist.*

Abschnitt 2.3:

Elementare Äquivalenz und Nichtstandardmodelle

Definition 2.15

Sei σ eine Signatur.

(a) Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen **elementar äquivalent** (kurz: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), wenn sie dieselben FO[σ]-Sätze erfüllen (d.h.: Für jeden FO[σ]-Satz φ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$).

(b) Die **Theorie** Th($\mathcal{A}$) einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Menge aller FO[σ]-Sätze, die $\mathcal{A}$ erfüllt. D.h.:

$$\text{Th}(\mathcal{A}) \;:=\; \{\varphi \in \text{FO}[\sigma] : \varphi \text{ ist ein Satz mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Definition 2.15

Sei σ eine Signatur.

(a) Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen **elementar äquivalent** (kurz: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), wenn sie dieselben FO[σ]-Sätze erfüllen (d.h.: Für jeden FO[σ]-Satz φ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$).

(b) Die **Theorie** Th($\mathcal{A}$) einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Menge aller FO[σ]-Sätze, die $\mathcal{A}$ erfüllt. D.h.:

$$\text{Th}(\mathcal{A}) \;:=\; \{\varphi \in \text{FO}[\sigma] : \varphi \text{ ist ein Satz mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Klar

- Für alle FO[σ]-Sätze φ und alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt: entweder $\varphi \in \text{Th}(\mathcal{A})$ oder $\neg\varphi \in \text{Th}(\mathcal{A})$.
- Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$.

Korollar 2.16

Für jede Signatur σ und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathcal{A}$ elementar äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar (durch die Menge $\Phi := \mathrm{Th}(\mathcal{A})$).

Korollar 2.16

Für jede Signatur σ und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathcal{A}$ elementar äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar (durch die Menge $\Phi := \mathrm{Th}(\mathcal{A})$).

Bemerkung 2.17

Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

(a) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$

Korollar 2.16

Für jede Signatur σ und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathcal{A}$ elementar äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar (durch die Menge $\Phi := \mathrm{Th}(\mathcal{A})$).

Bemerkung 2.17

Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

(a) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$

(b) Ist $\mathcal{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, aber $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$. Dies folgt leicht aus dem aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem.

Zur Erinnerung (Standardmodell der Arithmetik)

- $\sigma_{\mathsf{Ar}} = \{ \leqslant, +, \times, 0, 1 \}$, wobei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist, $+$ und $\times$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind und 0 und 1 zwei Konstantensymbole sind.
- Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} \;:=\; \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\right),$$

  wobei $\leqslant^{\mathcal{N}}$, $+^{\mathcal{N}}$, $\times^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind, und $0^{\mathcal{N}}$, $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 und 1 sind.

Definition 2.18

Ein **Nichtstandardmodell der Arithmetik** ist eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente, aber nicht-isomorphe σ_{Ar}-Struktur.

Aus Bemerkung 2.17 (b) folgt direkt, dass es Nichtstandardmodelle der Arithmetik gibt. Gemäß dem folgenden Satz gibt es sogar ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

Satz 2.19 (Der Satz von Skolem)

Es gibt ein abzählbares Nichstandardmodell der Arithmetik.

Abschnitt 2.4:

Literaturhinweise

Abschnitt 2.5:
Übungsaufgaben

Kapitel 3:

Die Grenzen der Berechenbarkeit

Abschnitt 3.1:

Entscheidbarkeit und rekursive Aufzählbarkeit

Zur Erinnerung

Definition 3.0

Sei M eine abzählbare Menge.

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und ausgibt

- „JA", falls $m \in L$
- „NEIN", falls $m \notin L$

Zur Erinnerung

Definition 3.0

Sei M eine abzählbare Menge.

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und ausgibt

- „JA“, falls $m \in L$
- „NEIN“, falls $m \notin L$

(b) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **semi-entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$

- nach endlich vielen Schritten anhält und dann „JA“ ausgibt, falls $m \in L$ ist
- nie anhält, falls $m \notin L$ ist

Zur Erinnerung

Definition 3.0

Sei M eine abzählbare Menge.

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und ausgibt
- „JA“, falls $m \in L$
- „NEIN“, falls $m \notin L$

(b) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **semi-entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$
- nach endlich vielen Schritten anhält und dann „JA“ ausgibt, falls $m \in L$ ist
- nie anhält, falls $m \notin L$ ist

(c) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **rekursiv aufzählbar** (engl.: **recursively enumerable**, kurz **r.e.**), falls es einen Algorithmus gibt, der nach und nach sämtliche Elemente in L ausgibt.

Zur Erinnerung

Definition 3.0

Sei M eine abzählbare Menge.

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und ausgibt

- „JA“, falls $m \in L$
- „NEIN“, falls $m \notin L$

(b) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **semi-entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$

- nach endlich vielen Schritten anhält und dann „JA“ ausgibt, falls $m \in L$ ist
- nie anhält, falls $m \notin L$ ist

(c) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **rekursiv aufzählbar** (engl.: **recursively enumerable**, kurz **r.e.**), falls es einen Algorithmus gibt, der nach und nach sämtliche Elemente in L ausgibt.

(d) Sei M' eine Menge.
Eine Funktion $f : M \to M'$ heißt **berechenbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und den Wert $f(m)$ ausgibt.

Bemerkung

Ist $M = A^*$, wobei A ein endliche Alphabet ist, so kann man leicht sehen, dass folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ ist semi-entscheidbar genau dann, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Bemerkung

Ist $M = A^*$, wobei A ein endliche Alphabet ist, so kann man leicht sehen, dass folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ ist semi-entscheidbar genau dann, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

(b) Jede entscheidbabre Menge $L \subseteq M$ ist rekursiv aufzählbar.

Bemerkung

Ist $M = A^*$, wobei A ein endliche Alphabet ist, so kann man leicht sehen, dass folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ ist semi-entscheidbar genau dann, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

(b) Jede entscheidbabre Menge $L \subseteq M$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Sind $L_1 \subseteq M$ und $L_2 \subseteq M$ zwei rekursiv aufzählbare Mengen, so ist auch die Menge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

Vereinbarung zur Kodierung der Syntax von $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formeln*

- In diesem Kapitel sei σ eine **abzählbare, entscheidbare** Signatur. Die Sybole aus σ sind kodiert als Wörter über einem endlichen Alphabet, etwa dem `ASCII`-Alphabet.
- Wir kodieren σ-Terme und FO[σ]-Formeln als Wörter über einem endlichen Alphabet.
- Wir erweitern die Kodierung auf endliche Mengen von σ-Termen und FO[σ]-Formeln.
- Wir kodieren Ableitungen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ (vgl. Kapitel 1) als Wörter über einem endlichen Alphabet.

Sei $\mathcal{A}$ das endliche Alphabet, das wir für die Kodierung von Symbolen (aus σ), Termen, Formeln, endlichen Mengen von Termen und Formeln sowie Beweisen (in $\mathfrak{K}_S$) verwenden.
Seien $\mathsf{Y}, \mathsf{V}, \mathsf{T}, \mathsf{L}, \mathsf{S}, \mathsf{G}, \mathsf{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ die Mengen der kodierten

- Symbole aus σ (Y)
- Variablen (V)
- Terme (T)
- FO[σ]-Formeln (L)
- FO[σ]-Sätze (S)
- endlichen Formelmengen (G)
- Beweise (d.h. Ableitungen in $\mathfrak{K}_S$) (B)

Annahme 3.1

Unsere Kodierung hat die folgenden Eigenschaften:

Annahme 3.1

Unsere Kodierung hat die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen $\mathsf{Y}, \mathsf{V}, \mathsf{T}, \mathsf{L}, \mathsf{S}, \mathsf{G}, \mathsf{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ sind entscheidbar.

Annahme 3.1

Unsere Kodierung hat die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen $\mathsf{Y}, \mathsf{V}, \mathsf{T}, \mathsf{L}, \mathsf{S}, \mathsf{G}, \mathsf{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ sind entscheidbar.

(b) Die logischen Operatoren
- Negation
- Disjunktion
- Konjunktion
- existentielle Quantifizierung
- universelle Quantifizierung,

aufgefasst als 1- bzw. 2-stellige partielle Funktionen auf $\mathcal{A}^*$, sind berechenbar.

Annahme 3.1

Unsere Kodierung hat die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen $\mathrm{Y}, \mathrm{V}, \mathrm{T}, \mathrm{L}, \mathrm{S}, \mathrm{G}, \mathrm{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ sind entscheidbar.

(b) Die logischen Operatoren

- Negation
- Disjunktion
- Konjunktion
- existentielle Quantifizierung
- universelle Quantifizierung,

aufgefasst als 1- bzw. 2-stellige partielle Funktionen auf $\mathcal{A}^*$, sind berechenbar.

(c) Die beiden Funktionen, die jeder FO[σ]-Formel die (endliche) Menge ihrer Variablen bzw. die (endliche) Menge ihrer Subformeln zuordnen, sind berechenbar.

Annahme 3.1

Unsere Kodierung hat die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen $\mathsf{Y}, \mathsf{V}, \mathsf{T}, \mathsf{L}, \mathsf{S}, \mathsf{G}, \mathsf{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ sind entscheidbar.

(b) Die logischen Operatoren
- Negation
- Disjunktion
- Konjunktion
- existentielle Quantifizierung
- universelle Quantifizierung,

aufgefasst als 1- bzw. 2-stellige partielle Funktionen auf $\mathcal{A}^*$, sind berechenbar.

(c) Die beiden Funktionen, die jeder FO[σ]-Formel die (endliche) Menge ihrer Variablen bzw. die (endliche) Menge ihrer Subformeln zuordnen, sind berechenbar.

(d) Die Substitution einer Variablen durch einen Term in einer Formel, aufgefasst als 3-stellige partielle Funktion auf $\mathcal{A}^*$, ist berechenbar.

Annahme (fort.)

(e) Die 2-stellige Relation

$$\Big\{(f,g) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* : \begin{array}{l} f \in \mathsf{L} \text{ ist die Kodierung einer Formel } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und} \\ g \in \mathsf{G} \text{ ist die Kodierung einer endlichen Menge } \Gamma \\ \text{von } \mathrm{FO}[\sigma]\text{-Formeln mit } \varphi \in \Gamma \end{array} \Big\}$$

ist entscheidbar.

Annahme (fort.)

(e) Die 2-stellige Relation

$$\Big\{(f,g) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* : f \in \mathsf{L} \text{ ist die Kodierung einer Formel } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } g \in \mathsf{G} \text{ ist die Kodierung einer endlichen Menge } \Gamma \text{ von } \mathrm{FO}[\sigma]\text{-Formeln mit } \varphi \in \Gamma\Big\}$$

ist entscheidbar.

(f) Die 3-stellige Relation

$$\Big\{(b,g,f) \in (\mathcal{A}^*)^3 : g \in \mathsf{G} \text{ ist die Kodierung einer endlichen Menge } \Gamma \text{ von } \mathrm{FO}[\sigma]\text{-Formeln, } f \in \mathsf{L} \text{ ist die Kodierung einer } \mathrm{FO}[\sigma]\text{-Formel } \varphi,\ b \in \mathsf{B} \text{ ist die Kodierung einer Ableitung } \Gamma \vdash \varphi \text{ im Sequenzenkalkül}\Big\}$$

ist entscheidbar.

Bemerkung

In Abschnitt 3.2 werden wir eine Kodierung angeben, die die in Annahme 3.1 aufgelisteten Eigenschaften hat.

Bemerkung

In Abschnitt 3.2 werden wir eine Kodierung angeben, die die in Annahme 3.1 aufgelisteten Eigenschaften hat.

Vereinbarung

Für den Rest dieses Kapitels unterscheiden wir nicht mehr zwischen syntaktischen Objekten (wie FO[σ]-Formeln) und ihren Kodierungen. Zum Beispiel sprechen wir direkt von **entscheidbaren Formelmengen** (und meinen dabei eigentlich entscheidbare Mengen von Kodierungen von Formeln).

Lemma 3.2 (Aufzählbarkeit der beweisbaren Sätze)

Sei σ eine abzählbare, entscheidbare Signatur. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine rekursiv aufzählbare Formelmenge. Dann ist auch die Menge

$$\{\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma] \,:\, \Phi \models \varphi\}$$

rekursiv aufzählbar.

Lemma 3.2 (Aufzählbarkeit der beweisbaren Sätze)

Sei σ *eine abzählbare, entscheidbare Signatur. Sei* $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *eine rekursiv aufzählbare Formelmenge. Dann ist auch die Menge*

$$\{\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma] \, : \, \Phi \models \varphi\}$$

rekursiv aufzählbar.

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 3.2 erhalten wir:

Korollar 3.3

Sei σ *eine abzählbare, entscheidbare Signatur. Dann gilt: Die Menge aller allgemeingültigen* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln ist rekursiv aufzählbar.*

Abschnitt 3.2:

Gödelisierung von $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$

Notation 3.4 (Arithmetik)

- Wir betrachten nun die Signatur $\sigma_{\mathsf{Ar}} \;=\; \{\, \leqslant,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1 \,\}$.
- $\mathcal{N}$ bezeichnet wie üblich das Standardmodell $(\mathbb{N},\ \leqslant^{\mathcal{N}},\ +^{\mathcal{N}},\ \cdot^{\mathcal{N}},\ 0^{\mathcal{N}},\ 1^{\mathcal{N}})$ der Arithmetik.
- Für Terme $t, u \in T_{\sigma_{\mathsf{Ar}}}$ schreiben wir $t < u$ als Abkürzung für die FO[σ_{Ar}]-Formel $(t \leqslant u \ \wedge\ \neg t = u)$.

Notation 3.4 (Arithmetik)

- Wir betrachten nun die Signatur $\sigma_{\mathsf{Ar}} \;=\; \{\leqslant,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$.
- $\mathcal{N}$ bezeichnet wie üblich das Standardmodell $(\mathbb{N},\ \leqslant^{\mathcal{N}},\ +^{\mathcal{N}},\ \cdot^{\mathcal{N}},\ 0^{\mathcal{N}},\ 1^{\mathcal{N}})$ der Arithmetik.
- Für Terme $t, u \in T_{\sigma_{\mathsf{Ar}}}$ schreiben wir $t < u$ als Abkürzung für die FO[σ_{Ar}]-Formel $(t \leqslant u \;\wedge\; \neg t = u)$.

Definition 3.5 (Zahlterme)

Die Zahlterme $\underline{n}$, für $n \in \mathbb{N}$, seien die folgendermaßen definierten σ_{Ar}-Terme

$$\underline{0} := 0 \;\text{ und f.a. } n \in \mathbb{N} \text{ sei } \underline{n+1} := (\underline{n} + 1); \;\text{ präzise } \underline{n+1} := +(\underline{n}, 1)$$

Notation 3.4 (Arithmetik)

- Wir betrachten nun die Signatur $\sigma_{\text{Ar}} = \{ \leqslant, +, \cdot, 0, 1 \}$.
- $\mathcal{N}$ bezeichnet wie üblich das Standardmodell $(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ der Arithmetik.
- Für Terme $t, u \in T_{\sigma_{\text{Ar}}}$ schreiben wir $t < u$ als Abkürzung für die FO[σ_{Ar}]-Formel $(t \leqslant u \ \wedge \ \neg t = u)$.

Definition 3.5 (Zahlterme)

Die Zahlterme $\underline{n}$, für $n \in \mathbb{N}$, seien die folgendermaßen definierten σ_{Ar}-Terme

$$\underline{0} := 0 \ \text{ und f.a. } n \in \mathbb{N} \text{ sei } \underline{n+1} := (\underline{n} + 1); \ \text{ präzise } \underline{n+1} := +(\underline{n}, 1)$$

Beispiel

$$\underline{0} = 0 \qquad \underline{1} \mathrel{\widehat{=}} (\underline{0} + 1) \mathrel{\widehat{=}} +(0,1) \qquad \underline{2} \mathrel{\widehat{=}} (\underline{1} + 1) \mathrel{\widehat{=}} +(\underline{1}, 1) = +(+(0,1),1)$$

Arithmetisierung

- Wir kodieren syntaktische Objekte wie Symbole aus σ_{Ar}, Formeln aus FO[σ_{Ar}] usw. durch natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die wir als Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\mathsf{Hex}} := \{0, \ldots, 9, a, \ldots, f\}$ auffassen.

- Wir kodieren syntaktische Objekte wie Symbole aus σ_{Ar}, Formeln aus FO[σ_{Ar}] usw. durch natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die wir als Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\mathrm{Hex}} := \{0, \ldots, 9, a, \ldots, f\}$ auffassen.
  Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $[n]_{\mathrm{Hex}}$, um ihre Hexadezimaldarstellung zu bezeichnen. Für ein $w \in \mathcal{A}_{\mathrm{Hex}}^*$ schreiben wir $[w]_{\mathbb{N}}$, um die natürliche Zahl zu bezeichnen, die durch w in Hexadezimaldarstellung repräsentiert wird.

- Wir kodieren syntaktische Objekte wie Symbole aus σ_{Ar}, Formeln aus FO[σ_{Ar}] usw. durch natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die wir als Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\mathsf{Hex}} := \{0, \ldots, 9, a, \ldots, f\}$ auffassen.
  Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $[n]_{\mathsf{Hex}}$, um ihre Hexadezimaldarstellung zu bezeichnen. Für ein $w \in \mathcal{A}_{\mathsf{Hex}}^*$ schreiben wir $[w]_{\mathbb{N}}$, um die natürliche Zahl zu bezeichnen, die durch w in Hexadezimaldarstellung repräsentiert wird.
- Unser Ziel ist eine Kodierung, die alle Eigenschaften aus Annahme 3.1 besitzt.

- Wir kodieren syntaktische Objekte wie Symbole aus σ_{Ar}, Formeln aus FO[σ_{Ar}] usw. durch natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die wir als Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\text{Hex}} := \{0, \ldots, 9, a, \ldots, f\}$ auffassen.
  Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $[n]_{\text{Hex}}$, um ihre Hexadezimaldarstellung zu bezeichnen. Für ein $w \in \mathcal{A}_{\text{Hex}}^*$ schreiben wir $[w]_{\mathbb{N}}$, um die natürliche Zahl zu bezeichnen, die durch w in Hexadezimaldarstellung repräsentiert wird.
- Unser Ziel ist eine Kodierung, die alle Eigenschaften aus Annahme 3.1 besitzt.
- Weil für $w \in \mathcal{A}_{\text{Hex}}^*$ die Wörter w und $0w$ dieselbe Zahl darstellen, vermeiden wir Kodewörter, die mit 0 beginnen.

- Wir kodieren syntaktische Objekte wie Symbole aus σ_{Ar}, Formeln aus FO[σ_{Ar}] usw. durch natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die wir als Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\text{Hex}} := \{0, \ldots, 9, a, \ldots, f\}$ auffassen.
  Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $[n]_{\text{Hex}}$, um ihre Hexadezimaldarstellung zu bezeichnen. Für ein $w \in \mathcal{A}_{\text{Hex}}^*$ schreiben wir $[w]_{\mathbb{N}}$, um die natürliche Zahl zu bezeichnen, die durch w in Hexadezimaldarstellung repräsentiert wird.
- Unser Ziel ist eine Kodierung, die alle Eigenschaften aus Annahme 3.1 besitzt.
- Weil für $w \in \mathcal{A}_{\text{Hex}}^*$ die Wörter w und $0w$ dieselbe Zahl darstellen, vermeiden wir Kodewörter, die mit 0 beginnen.
- Die Kodierung eines Objekts $\mathcal{O}$ werden wir stets mit $\langle \mathcal{O} \rangle$ bezeichnen.

Definition 3.6 (Kodierung von $A_{\sigma_{\mathsf{Ar}}}$)

Wir kodieren die Elemente des Alphabets $A_{\sigma_{\mathsf{Ar}}}$ durch Worte über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\mathsf{Hex}}$ wie folgt:

Definition 3.6 (Kodierung von $A_{\sigma_{\mathsf{Ar}}}$)

Wir kodieren die Elemente des Alphabets $A_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$ durch Worte über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\mathsf{Hex}}$ wie folgt:

- Variablen: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\langle v_n \rangle \ := \ 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ mal}} \ = \ [16^n]_{\mathsf{Hex}}$$

Definition 3.6 (Kodierung von $A_{\sigma_{\text{Ar}}}$)

Wir kodieren die Elemente des Alphabets $A_{\sigma_{\text{Ar}}}$ durch Worte über dem Alphabet $\mathcal{A}_{\text{Hex}}$ wie folgt:

- Variablen: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\langle v_n \rangle \;:=\; 1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ mal}} \;=\; [16^n]_{\text{Hex}}$$

- Logische Symbole:
  - $\langle \neg \rangle \;:=\; 2 \;=\; [2]_{\text{Hex}}$
  - $\langle \wedge \rangle \;:=\; 3 \;=\; [3]_{\text{Hex}}$
  - $\langle \vee \rangle \;:=\; 4 \;=\; [4]_{\text{Hex}}$
  - $\langle \exists \rangle \;:=\; 5 \;=\; [5]_{\text{Hex}}$
  - $\langle \forall \rangle \;:=\; 6 \;=\; [6]_{\text{Hex}}$
  - $\langle\, (\,\rangle \;:=\; 7 \;=\; [7]_{\text{Hex}}$
  - $\langle\,) \,\rangle \;:=\; 8 \;=\; [8]_{\text{Hex}}$
  - $\langle = \rangle \;:=\; 9 \;=\; [9]_{\text{Hex}}$
  - $\langle , \rangle \;:=\; f \;=\; [15]_{\text{Hex}}$

- Arithmetische Symbole:
  - $\langle\leqslant\rangle \quad := \; a \; = \quad [10]_{\mathsf{Hex}}$
  - $\langle+\rangle \quad := \; b \; = \quad [11]_{\mathsf{Hex}}$
  - $\langle\cdot\rangle \quad := \; c \; = \quad [12]_{\mathsf{Hex}}$
  - $\langle 0\rangle \quad := \; d \; = \quad [13]_{\mathsf{Hex}}$
  - $\langle 1\rangle \quad := \; e \; = \quad [14]_{\mathsf{Hex}}$

Definition 3.7 (Kodierung von Termen, Formeln und Beweisen)

(a) Für jedes Wort $w = w_1 \cdots w_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$ ist $\langle w \rangle = \langle w_1 \rangle \langle w_2 \rangle \cdots \langle w_\ell \rangle$.
Insbesondere gilt:

- Für jeden Term $t \in T_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$, etwa $t = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$ ist $\langle t \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.
- Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$, etwa $\varphi = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$ ist $\langle \varphi \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.

Definition 3.7 (Kodierung von Termen, Formeln und Beweisen)

(a) Für jedes Wort $w = w_1 \cdots w_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$ ist $\langle w \rangle = \langle w_1 \rangle \langle w_2 \rangle \cdots \langle w_\ell \rangle$.
Insbesondere gilt:

- Für jeden Term $t \in T_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$, etwa $t = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$ ist $\langle t \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.
- Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$, etwa $\varphi = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathbf{Ar}}}$ ist $\langle \varphi \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.

(b) Für eine endliche nicht-leere Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$ sei

$$\langle \Phi \rangle \; := \; \langle \varphi_1 \rangle \mathit{ff} \langle \varphi_2 \rangle \mathit{ff} \cdots \mathit{ff} \langle \varphi_\ell \rangle$$

falls $\Phi = \{\varphi_1, \ldots \varphi_\ell\}$ mit $[\langle \varphi_1 \rangle]_{\mathbb{N}} \leqslant \ldots \leqslant [\langle \varphi_\ell \rangle]_{\mathbb{N}}$, wobei $\leqslant$ hier die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Definition 3.7 (Kodierung von Termen, Formeln und Beweisen)

(a) Für jedes Wort $w = w_1 \cdots w_\ell \in A^*_{\sigma_{\text{Ar}}}$ ist $\langle w \rangle = \langle w_1 \rangle \langle w_2 \rangle \cdots \langle w_\ell \rangle$.
Insbesondere gilt:

- Für jeden Term $t \in T_{\sigma_{\text{Ar}}}$, etwa $t = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\text{Ar}}}$ ist $\langle t \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.
- Für jede Formel $\varphi \in \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$, etwa $\varphi = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\text{Ar}}}$ ist $\langle \varphi \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.

(b) Für eine endliche nicht-leere Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ sei

$$\langle \Phi \rangle \ := \ \langle \varphi_1 \rangle \mathit{ff} \langle \varphi_2 \rangle \mathit{ff} \cdots \mathit{ff} \langle \varphi_\ell \rangle$$

falls $\Phi = \{\varphi_1, \ldots \varphi_\ell\}$ mit $[\langle \varphi_1 \rangle]_{\mathbb{N}} \leqslant \ldots \leqslant [\langle \varphi_\ell \rangle]_{\mathbb{N}}$, wobei $\leqslant$ hier die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Beachte

$\mathit{ff} \in \mathcal{A}^2_{\text{Hex}}$ wird hier als „Trennsymbol“ verwendet.

Definition 3.7 (Kodierung von Termen, Formeln und Beweisen)

(a) Für jedes Wort $w = w_1 \cdots w_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathrm{Ar}}}$ ist $\langle w \rangle = \langle w_1 \rangle \langle w_2 \rangle \cdots \langle w_\ell \rangle$.
Insbesondere gilt:

- Für jeden Term $t \in T_{\sigma_{\mathrm{Ar}}}$, etwa $t = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathrm{Ar}}}$ ist $\langle t \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.
- Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$, etwa $\varphi = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{\mathrm{Ar}}}$ ist $\langle \varphi \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$.

(b) Für eine endliche nicht-leere Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$ sei

$$\langle \Phi \rangle \ := \ \langle \varphi_1 \rangle \mathit{ff} \langle \varphi_2 \rangle \mathit{ff} \cdots \mathit{ff} \langle \varphi_\ell \rangle$$

falls $\Phi = \{\varphi_1, \ldots \varphi_\ell\}$ mit $[\langle \varphi_1 \rangle]_{\mathbb{N}} \leqslant \ldots \leqslant [\langle \varphi_\ell \rangle]_{\mathbb{N}}$, wobei $\leqslant$ hier die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Beachte

$\mathit{ff} \in \mathcal{A}^2_{\mathrm{Hex}}$ wird hier als „Trennsymbol" verwendet.

Ferner sei $\langle \emptyset \rangle \ := \ 0 \ = \ [0]_{\mathrm{Hex}}$.

(c) Für eine Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ sei

$$\langle \Gamma \vdash \varphi \rangle \ := \ \mathit{fff}\,\langle \Gamma \rangle\,\mathit{fff}\,\langle \varphi \rangle\,\mathit{fff}\,.$$

(c) Für eine Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ sei

$$\langle \Gamma \vdash \varphi \rangle \ := \ \mathit{fff}\,\langle \Gamma \rangle\,\mathit{fff}\,\langle \varphi \rangle\,\mathit{fff}\,.$$

(d) Für eine Folge $(S_1, \ldots, S_\ell)$ von Sequenzen (also insbesondere auch für eine Ableitung im Sequenzenkalkül) sei

$$\langle (S_1, \ldots, S_\ell) \rangle \ := \ \langle S_1 \rangle \cdots \langle S_\ell \rangle.$$

Lemma 3.8

Die in Definition 3.6 und 3.7 eingeführte Kodierung besitzt alle Eigenschaften aus Annahme 3.1.
Ferner gilt für alle syntaktischen Objekte $\mathcal{O}$ *(d.h. für Terme, Formeln, Formelmengen, Sequenzen, Beweise), dass entweder* $\langle\mathcal{O}\rangle = 0$ *ist oder* $\langle\mathcal{O}\rangle$ *mit einem Zeichen in* $\{1, \ldots, 9, a, \ldots, f\}$ *beginnt. Daher lässt sich jedes Kodewort* $\langle\mathcal{O}\rangle$ *als Hexadezimaldarstellung der natürlichen Zahl* $[\langle\mathcal{O}\rangle]_{\mathbb{N}}$ *auffassen.*

Bemerkung 3.9 (Gödelisierung)

Die Kodierung von Formeln durch natürliche Zahlen bezeichnet man auch als **Gödelisierung**.

Für eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$ bezeichnet man die Zahl $n_\varphi := [\langle \varphi \rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ als die **Gödelnummer von** φ.

Analog bezeichnen wir für einen Term $t \in A_{\sigma_{\mathsf{Ar}}}$ die Zahl $n_t := [\langle t \rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ als die Gödelnummer von t.

Bemerkung 3.9 (Gödelisierung)

Die Kodierung von Formeln durch natürliche Zahlen bezeichnet man auch als **Gödelisierung**.

Für eine Formel $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$ bezeichnet man die Zahl $n_\varphi := [\langle \varphi \rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ als die **Gödelnummer von** φ.

Analog bezeichnen wir für einen Term $t \in A_{\sigma_{\mathsf{Ar}}}$ die Zahl $n_t := [\langle t \rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ als die Gödelnummer von t.

Lemma 3.10

Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) := [\langle \underline{n} \rangle]_{\mathbb{N}}$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$) ist berechenbar.
D.h.: Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Gödelnummer des Terms $\underline{n}$ ausgibt.

Lemma 3.11 (Definierbare Zahlenmengen)

Sei Φ *eine entscheidbare Menge von* FO[σ_{Ar}]*-Sätzen, und sei* $\varphi(x)$ *eine* FO[σ_{Ar}]*-Formel. Dann gilt:*

(a) *Die Menge* $\{n \in \mathbb{N} \;:\; \Phi \models \varphi(\underline{n})\}$ *ist rekursiv aufzählbar.*

(b) *Die Menge* $\{n \in \mathbb{N} \;:\; \Phi \models \neg\varphi(\underline{n})\}$ *ist rekursiv aufzählbar.*

(c) *Wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\Phi \models \varphi(\underline{n})$ *oder* $\Phi \models \neg\varphi(\underline{n})$, *so ist die Menge* $\{n \in \mathbb{N} \;:\; \Phi \models \varphi(\underline{n})\}$ *entscheidbar.*

Abschnitt 3.3:

FO-Definierbarkeit der berechenbaren Funktionen

Δ_0-Formeln und das Lemma über die β-Funktion

Definition 3.12 (Arithmetische Relationen)

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ eine Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln und sei $k \in \mathbb{N}$.

Definition 3.12 (Arithmetische Relationen)

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ eine Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln und sei $k \in \mathbb{N}$.

(a) Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt **Φ-definierbar**, wenn es eine Formel $\varphi_R(x_1, \ldots, x_k) \in \Phi$ mit $R = \varphi_R(\mathcal{N})$ gibt.

Zur Erinnerung

$$\varphi_R(\mathcal{N}) = \big\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \,:\, \mathcal{N} \models \varphi_R[n_1, \ldots, n_k]\big\}$$

Definition 3.12 (Arithmetische Relationen)

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$ eine Menge von $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formeln und sei $k \in \mathbb{N}$.

(a) Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt **Φ-definierbar**, wenn es eine Formel $\varphi_R(x_1, \ldots, x_k) \in \Phi$ mit $R = \varphi_R(\mathcal{N})$ gibt.

Zur Erinnerung

$$\varphi_R(\mathcal{N}) = \big\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \,:\, \mathcal{N} \models \varphi_R[n_1, \ldots, n_k]\big\}$$

(b) Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ heißt **Φ-definierbar**, wenn ihr Graph

$$\big\{(n_1, \ldots, n_k, m) \in \mathbb{N}^{k+1} \,:\, f(n_1, \ldots, n_k) = m\big\}$$

eine Φ-definierbare Relation ist.

Notation 3.13 (Beschränkte Quantoren)

Für $x \in \text{VAR}$, $t \in T_{\sigma_{\textbf{Ar}}}$ und $\varphi \in \text{FO}[\sigma_{\textbf{Ar}}]$ schreiben wir

- $\exists x \leqslant t\, \varphi$ an Stelle von $\exists x\, (x \leqslant t \land \varphi)$
- $\forall x \leqslant t\, \varphi$ an Stelle von $\forall x\, (x \leqslant t \to \varphi)$.

Wir bezeichnen $\exists x \leqslant t$ und $\forall x \leqslant t$ als **beschränkte Quantoren**.
Wir schreiben auch

- $\exists x < t\, \varphi$ als Abkürzung für $\exists x \leqslant t(\neg x = t \land \varphi)$
- $\forall x < t\, \varphi$ als Abkürzung für $\forall x \leqslant t(\neg x = t \to \varphi)$.

Definition 3.14 (Δ_0: Klasse aller beschränkten FO[σ_{Ar}]-Formeln)

Die Klasse Δ_0 aller **beschränkten** FO[σ_{Ar}]-Formeln ist rekursiv wie folgt definiert:

Definition 3.14 (Δ_0: Klasse aller beschränkten FO[σ_{Ar}]-Formeln)

Die Klasse Δ_0 aller **beschränkten** FO[σ_{Ar}]-Formeln ist rekursiv wie folgt definiert:

- Für jede **atomare** FO[σ_{Ar}]-Formel φ gilt: $\varphi \in \Delta_0$.

Definition 3.14 (Δ_0: Klasse aller beschränkten FO[σ_{Ar}]-Formeln)

Die Klasse Δ_0 aller **beschränkten** FO[σ_{Ar}]-Formeln ist rekursiv wie folgt definiert:

- Für jede **atomare** FO[σ_{Ar}]-Formel φ gilt: $\varphi \in \Delta_0$.
- Sind $\varphi \in \Delta_0$ und $\psi \in \Delta_0$, so gilt auch $\neg\varphi \in \Delta_0$, $(\varphi \wedge \psi) \in \Delta_0$, $(\varphi \vee \psi) \in \Delta_0$.

Definition 3.14 (Δ_0: Klasse aller beschränkten FO[σ_{Ar}]-Formeln)

Die Klasse Δ_0 aller **beschränkten** FO[σ_{Ar}]-Formeln ist rekursiv wie folgt definiert:

- Für jede **atomare** FO[σ_{Ar}]-Formel φ gilt: $\varphi \in \Delta_0$.
- Sind $\varphi \in \Delta_0$ und $\psi \in \Delta_0$, so gilt auch $\neg\varphi \in \Delta_0$, $(\varphi \wedge \psi) \in \Delta_0$, $(\varphi \vee \psi) \in \Delta_0$.
- Sind $\varphi \in \Delta_0$, $x \in \text{VAR}$ und $t \in T_{\sigma_{\text{Ar}}}$, so dass x nicht in t vorkommt, so gilt: $\exists x \leqslant t\, \varphi \in \Delta_0$ und $\forall x \leqslant t\, \varphi \in \Delta_0$.

Lemma 3.15 (Das Lemma über die β-Funktion)

Es gibt eine Δ_0-definierbare Funktion

$$\beta : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit der folgenden Eigenschaft:
Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jede Folge $(n_0, \ldots, n_{\ell-1}) \in \mathbb{N}^\ell$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geqslant \max\{\ell, n_0, \ldots, n_{\ell-1})\}$, so dass f.a. $i \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ gilt:

$$\beta(s, i) = n_i.$$

(D.h.: s repräsentiert die Folge $(n_0, \ldots, n_{\ell-1})$ und $\beta(s, i)$ liefert die Komponente n_i)

Lemma 3.15 (Das Lemma über die β-Funktion)

Es gibt eine Δ_0-definierbare Funktion

$$\beta : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit der folgenden Eigenschaft:
Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jede Folge $(n_0, \dots, n_{\ell-1}) \in \mathbb{N}^\ell$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geqslant \max\{\ell, n_0, \dots, n_{\ell-1})\}$, so dass f.a. $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ gilt:

$$\beta(s, i) = n_i.$$

(D.h.: s repräsentiert die Folge $(n_0, \dots, n_{\ell-1})$ und $\beta(s, i)$ liefert die Komponente n_i)

Notation

Im Folgenden bezeichnet β immer die Funktion aus Lemma 3.15; und für $s, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist $B(s, \ell) := (\beta(s, 0), \dots, \beta(s, \ell - 1))$.

Ein formales Berechnungsmodell

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass alle berechenbaren Funktionen und rekursiv aufzählbaren Relationen durch FO[σ_{Ar}]-Formeln definiert werden können (im Sinne von Definition 3.12) (- daraus werden wir dann z.B. folgern, dass Th($\mathcal{N}$) nicht rekursiv aufzählbar ist).

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass alle berechenbaren Funktionen und rekursiv aufzählbaren Relationen durch FO[σ_{Ar}]-Formeln definiert werden können (im Sinne von Definition 3.12) (- daraus werden wir dann z.B. folgern, dass Th($\mathcal{N}$) nicht rekursiv aufzählbar ist).

Dazu müssen wir allerdings einen präzisen **Berechnungs**-Begriff verwenden. Gemäß der Church-Turing-These könnten wir dazu jedes „sinnvolle“ Berechnungsmodell wählen (z.B. Turingmaschinen, Registermaschinen, WHILE-Programme,...). Für unsere Zwecke besonders bequem ist, das folgende formale Berechnungsmodell zu verwenden:

Wir betrachten **deterministische 1-Band-Turingmaschinen**

$$\mathsf{M}{=}(\mathsf{Q},\ \mathsf{A}_{\mathsf{TM}},\ \delta,\ q_0,\ \mathsf{F})$$

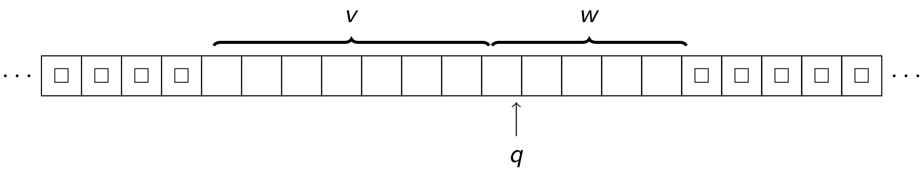
wobei Q die Menge der Zustände, A_{TM} das Bandalphabet, q_0 den Startzustand, F die Menge der Endzustände und $\delta : \mathsf{Q}\backslash\mathsf{F} \times \mathsf{A}_{\mathsf{TM}} \to \mathsf{Q} \times \mathsf{A}_{\mathsf{TM}} \times \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\}$ die Übergangsfunktion bezeichnet.

Wir betrachten **deterministische 1-Band-Turingmaschinen**

$$\mathsf{M}{=}(\mathsf{Q},\, \mathsf{A}_{\mathsf{TM}},\, \delta,\, q_0,\, \mathsf{F})$$

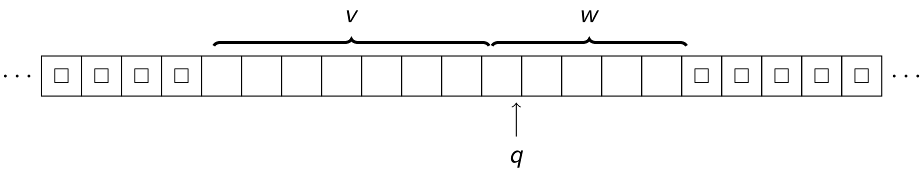
wobei Q die Menge der Zustände, A_{TM} das Bandalphabet, q_0 den Startzustand, F die Menge der Endzustände und $\delta : \mathsf{Q}\setminus\mathsf{F} \times \mathsf{A}_{\mathsf{TM}} \to \mathsf{Q} \times \mathsf{A}_{\mathsf{TM}} \times \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\}$ die Übergangsfunktion bezeichnet. Wir betrachten das feste Alphabet $\mathsf{A}_{\mathsf{TM}} := \{\,|\,, \#, \Box\}$, wobei $|$ zur unären Darstellung natürlicher Zahlen dient, $\#$ als Trennsymbol und $\Box$ als Leerzeichen (Blank) verwendet wird. O.B.d.A. gelte stets $\mathsf{Q} \cap \mathsf{A}_{\mathsf{TM}} = \emptyset$.

Konfigurationen von M beschreiben wir als Wörter $\kappa = vqw \in (\mathsf{A}_{\mathsf{TM}} \cup \mathsf{Q})^*$, wobei $v, w \in \mathsf{A}_{\mathsf{TM}}^*$ und $q \in \mathsf{Q}$ ist.
$\kappa = vqw$ beschreibt folgende Konfiguartion von M:



D.h.: q ist der aktuelle Zustand, vw ist der nicht-leere Teil der Bandbeschriftung und der Schreib-/Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w (bzw., falls $w = \varepsilon$ das leere Wort ist, so steht der Schreib-/Lesekopf auf dem ersten Blank-Symbol $\Box$ rechts von der aktuellen Beschriftung v des Bandes).

Konfigurationen von M beschreiben wir als Wörter $\kappa = vqw \in (\mathrm{A}_{\mathrm{TM}} \cup \mathrm{Q})^*$, wobei $v, w \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}^*$ und $q \in \mathrm{Q}$ ist.
$\kappa = vqw$ beschreibt folgende Konfiguartion von M:



D.h.: q ist der aktuelle Zustand, vw ist der nicht-leere Teil der Bandbeschriftung und der Schreib-/Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w (bzw., falls $w = \varepsilon$ das leere Wort ist, so steht der Schreib-/Lesekopf auf dem ersten Blank-Symbol $\Box$ rechts von der aktuellen Beschriftung v des Bandes).

Wir schreiben $\kappa \to_{\mathrm{M}} \kappa'$, um auszudrücken, dass κ' die **Nachfolgekonfiguration** von κ ist.

Eine **Berechnung von** M ist eine endliche Folge von aufeinanderfolgenden Konfigurationen. Wir schreiben $\kappa \to_{\mathsf{M}}^{*} \kappa'$, um auszudrücken, dass es eine Berechnung gibt, die κ in κ' überführt.

Eine **Berechnung von** M ist eine endliche Folge von aufeinanderfolgenden Konfigurationen. Wir schreiben $\kappa \to_{\mathsf{M}}^{*} \kappa'$, um auszudrücken, dass es eine Berechnung gibt, die κ in κ' überführt.

Notation

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$|^{n} \;:=\; \underbrace{|\,|\ldots|}_{n\text{-mal}} \in \mathsf{A}_{\mathsf{TM}}^{*}$$

die **Unärdarstellung** von n

Definition 3.16

(a) Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ heißt **TM-berechenbar**, wenn es eine deterministische 1-Band-Turingmaschine M=(Q, A_{TM}, δ, q_0, F) gibt, so dass für alle $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(m_1, \dots, m_k) = n \iff \text{es gibt ein } q \in \text{F, so dass}$$
$$q_0 \,|^{m_1} \# \,|^{m_2} \# \dots \# \,|^{m_k} \;\to_{\text{M}}^{*}\; |^n \, q$$

Definition 3.16

(a) Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ heißt **TM-berechenbar**, wenn es eine deterministische 1-Band-Turingmaschine $\mathsf{M}=(\mathsf{Q}, \mathsf{A}_{\mathsf{TM}}, \delta, q_0, \mathsf{F})$ gibt, so dass für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(m_1, \ldots, m_k) = n \iff \text{es gibt ein } q \in \mathsf{F}, \text{ so dass}$$
$$q_0 \,|^{m_1} \# \,|^{m_2} \# \ldots \# \,|^{m_k} \;\to_{\mathsf{M}}^{*}\; |^{n}\, q$$

Beachte

Für $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k \setminus \mathrm{Def}(f)$ gilt: es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathsf{F}$, so dass $q_0 \,|^{m_1} \# \,|^{m_2} \# \ldots \# \,|^{m_k} \;\to_{\mathsf{M}}^{*}\; |^{n}\, q$.

Definition 3.16

(a) Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ heißt **TM-berechenbar**, wenn es eine deterministische 1-Band-Turingmaschine $\mathrm{M}=(\mathrm{Q}, \mathrm{A_{TM}}, \delta, q_0, \mathrm{F})$ gibt, so dass für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(m_1, \ldots, m_k) = n \iff \text{es gibt ein } q \in \mathrm{F}, \text{ so dass}$$
$$q_0 \,|^{m_1} \# \,|^{m_2} \# \ldots \# \,|^{m_k} \;\to_{\mathrm{M}}^{*}\; |^{n}\, q$$

Beachte

Für $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k \setminus \mathrm{Def}(f)$ gilt: es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathrm{F}$, so dass $q_0 \,|^{m_1} \# \,|^{m_2} \# \ldots \# \,|^{m_k} \;\to_{\mathrm{M}}^{*}\; |^{n}\, q$.

(b) Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt **TM-rekursiv aufzählbar**, wenn die partielle Funktion f_R von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ mit $\mathrm{Def}(f_R) = R$ und $f_R(m_1, \ldots, m_k) = 1$, für alle $(m_1, \ldots, m_k) \in R$ TM-berechenbar ist.

FO-Definierbarkeit von TM-Berechnungen und die Unentscheidbarkeit der Arithmetik

Im Folgenden werden wir zeigen, dass jede (TM-)berechenbare partielle Funktion durch eine FO[σ_{Ar}]-Formel definiert werden kann.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass jede (TM-)berechenbare partielle Funktion durch eine FO[σ_{Ar}]-Formel definiert werden kann.

Vereinbarung 3.17

Wir indentifizieren das Symbol $\Box$ mit der Zahl 0, das Symbol $|$ mit der Zahl 1 und das Symbol $\#$ mit der Zahl 2.
Außerdem nehmen wir immer an, dass die Zustandsmenge Q unserer Turingmaschinen endliche Teilmengen von $\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$ sind.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass jede (TM-)berechenbare partielle Funktion durch eine FO[σ_{Ar}]-Formel definiert werden kann.

Vereinbarung 3.17

Wir indentifizieren das Symbol $\Box$ mit der Zahl 0, das Symbol $|$ mit der Zahl 1 und das Symbol $\#$ mit der Zahl 2.
Außerdem nehmen wir immer an, dass die Zustandsmenge Q unserer Turingmaschinen endliche Teilmengen von $\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$ sind.
Dadurch können wir jede Konfiguration $\kappa = vqw \in (\mathsf{A}_{\mathsf{TM}} \cup \mathsf{Q})^*$ als eine endliche Folge natürlicher Zahlen auffassen, die wir mit der β-Funktion durch eine natürliche Zahl kodieren können.

Lemma 3.18 (Kodierungen von Konfigurationen sind Δ_0-definierbar)

Sei M=(Q, A_{TM}, δ, q_0, F) eine deterministische 1-Band-Turingmaschine. Dann gibt es eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Konf}(x, y)$ so dass für alle $s, \ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Konf}[s, \ell] \iff B(s, \ell) \textit{ repräsentiert eine Konfiguration von } M$$

Lemma 3.18 (Kodierungen von Konfigurationen sind Δ_0-definierbar)

Sei $M=(Q, \mathsf{A}_{\mathsf{TM}}, \delta, q_0, F)$ eine deterministische 1-Band-Turingmaschine. Dann gibt es eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Konf}(x,y)$ so dass für alle $s,\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Konf}[s,\ell] \iff B(s,\ell) \text{ repräsentiert eine Konfiguration von } M$$

Zur Erinnerung

$B(s,\ell) := (\beta(s,0),\ldots,\beta(s,\ell-1))$.

Lemma 3.19 (Δ_0-Definierbarkeit von TM-Berechnungen)

Sei M=(Q, A_{TM}, δ, q_0, F) eine Turingmaschine.

(a) *Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Start,k}(x, y, z_1, \ldots, z_k)$, so dass für alle $s, \ell, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Start,k}[s, \ell, m_1, \ldots, m_k] \iff B(s,\ell) \text{ kodiert die Konfiguration } q_0 \,|^{m_1} \# \ldots \# \,|^{m_k} \text{ (also die Startkonfiguration von } M \text{ bei Eingabe } (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k)$$

Lemma 3.19 (Δ_0-Definierbarkeit von TM-Berechnungen)

Sei $M=(Q, A_{\mathsf{TM}}, \delta, q_0, F)$ eine Turingmaschine.

(a) *Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Start,k}(x, y, z_1, \ldots, z_k)$, so dass für alle $s, \ell, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Start,k}[s, \ell, m_1, \ldots, m_k] \iff B(s,\ell) \text{ kodiert die Konfiguration } q_0 \,|^{m_1} \# \ldots \# \,|^{m_k} \text{ (also die Startkonfiguration von } M \text{ bei Eingabe } (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k)$$

(b) *Es gibt eine Δ_0-Formel $\varphi^M_{Stopp}(x, y, z)$, so dass für alle $s, \ell, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathcal{N} \models \varphi^M_{Stopp}[s, \ell, n] \iff \text{es gibt ein } q \in F, \text{ so dass } B(s,\ell) \text{ die Konfiguration } |^n q \text{ kodiert}$$

Lemma (fort.)

(c) *Es gibt eine Δ_0-Formel $\varphi^{M}_{Schritt}(x, y, x', y')$, so dass für alle $s, \ell, s', \ell' \in \mathbb{N}$ gilt*

$\mathcal{N} \models \varphi^{M}_{Schritt}[s, \ell, s', \ell'] \iff$ *$B(s, \ell)$ und $B(s', \ell')$ kodieren Konfigurationen κ und κ' von M s.d. $\kappa \to_M \kappa'$ (d.h. κ' ist Nachfolgekonfiguration von κ)*

Definition 3.20 (Die Klasse $\Sigma_1 \subseteq \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$)

Die Menge Σ_1 besteht aus allen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei $x \in \mathrm{VAR}$ und $\varphi \in \Delta_0$.

Definition 3.20 (Die Klasse $\Sigma_1 \subseteq \text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$)

Die Menge Σ_1 besteht aus allen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei $x \in \text{VAR}$ und $\varphi \in \Delta_0$.

Satz 3.21 (Σ_1-Definierbarkeit der berechenbaren partiellen Funktionen und der rek. aufzählbaren Relationen)

(a) *Jede **TM-berechenbare** partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ (für $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ beliebig) ist Σ_1-definierbar.*

(b) *Jede **TM-rekursiv aufzählbare** Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ (f.a. $k \in \mathbb{N}$) ist Σ_1-definierbar.*

Definition 3.20 (Die Klasse $\Sigma_1 \subseteq \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$)

Die Menge Σ_1 besteht aus allen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei $x \in \mathrm{VAR}$ und $\varphi \in \Delta_0$.

Satz 3.21 (Σ_1-Definierbarkeit der berechenbaren partiellen Funktionen und der rek. aufzählbaren Relationen)

(a) *Jede **TM-berechenbare** partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ (für $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ beliebig) ist Σ_1-definierbar.*

(b) *Jede **TM-rekursiv aufzählbare** Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ (f.a. $k \in \mathbb{N}$) ist Σ_1-definierbar.*

Bemerkung 3.22

Die Umkehrung von Satz 3.21 gilt ebenfalls.
D.h.: Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ (bzw. eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$) ist *genau dann* berechenbar (bzw. rekursiv aufzählbar), wenn sie Σ_1-definierbar ist.
Details: Übung!

Als einfache Folgerung von Satz 3.21 erhalten wir

Satz 3.23 (Unentscheidbarkeit der Arithmetik)

$\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ *ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*
D.h.: Es gibt keinen Algorithmus, der nach und nach alle in der Standardarithmetik $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ *gültigen Sätze der Logik erster Stufe ausgibt.*

Abschnitt 3.4:

Der Satz von Trakhtenbrot

Definition 3.24

Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz φ heißt **im Endlichen erfüllbar**, falls es eine **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gibt, die φ erfüllt.

Definition 3.24

Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz φ heißt **im Endlichen erfüllbar**, falls es eine **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gibt, die φ erfüllt.

(b) Das **endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO**[σ] (kurz: **endl-Erf-FO**[σ]) ist das wie folgt definierte Berechnungsproblem:

> Endliches Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ]
>
> *Eingabe:* Ein FO[σ]-Satz φ
>
> *Frage:* Ist φ im Endlichen erfüllbar?

Definition 3.24

Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz φ heißt **im Endlichen erfüllbar**, falls es eine **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gibt, die φ erfüllt.

(b) Das **endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO**[σ] (kurz: **endl-Erf-FO**[σ]) ist das wie folgt definierte Berechnungsproblem:

> Endliches Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ]
>
> *Eingabe:* Ein FO[σ]-Satz φ
>
> *Frage:* Ist φ im Endlichen erfüllbar?

Formal: endl-Erf-FO[σ] $:= \{\varphi : \varphi$ ist ein im Endlichen erfüllbarer FO[σ]-Satz$\}$

Unter der Verwendung des Satzes von Gaifman (oder alternativ, des Satzes von Hanf), sieht man leicht, dass folgendes gilt:

Satz 3.25

Ist σ eine relationale Signatur, die ausschließlich aus Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *entscheidbar.*

Unter der Verwendung des Satzes von Gaifman (oder alternativ, des Satzes von Hanf), sieht man leicht, dass folgendes gilt:

Satz 3.25

Ist σ eine relationale Signatur, die ausschließlich aus Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *entscheidbar.*

Der Satz von Trakhtenbrot besagt, dass Satz 3.25 nicht für Signaturen gilt, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthalten:

Satz 3.26 (Satz von Trakhtenbrot, 1950)

Ist σ eine Signatur, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthält, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar.*

Folgerungen aus dem Satz von Trakhtenbrot

Wir betrachten zunächst die folgende „endliche Variante“ des Allgemeingültigkeitsproblems

Definition 3.27

Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz φ heißt **im Endlichen allgemeingültig**, falls für jede **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$.

Wir betrachten zunächst die folgende „endliche Variante“ des Allgemeingültigkeitsproblems

Definition 3.27

Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz φ heißt **im Endlichen allgemeingültig**, falls für jede **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$.

(b) Das **endliche Allgemeingültigkeitsproblem für FO**[σ] (kurz: **endl-Allg-FO**[σ]) ist folgende Berechnungsproblem:

Endliches Allgemeingültigkeitsproblem für FO[σ]	
Eingabe:	Ein FO[σ]-Satz φ
Frage:	Ist φ im Endlichen allgemeingültig?

Wir betrachten zunächst die folgende „endliche Variante“ des Allgemeingültigkeitsproblems

Definition 3.27

Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz φ heißt **im Endlichen allgemeingültig**, falls für jede **endliche** σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$.

(b) Das **endliche Allgemeingültigkeitsproblem für FO**[σ] (kurz: **endl-Allg-FO**[σ]) ist folgende Berechnungsproblem:

Endliches Allgemeingültigkeitsproblem für FO[σ]	
Eingabe:	Ein FO[σ]-Satz φ
Frage:	Ist φ im Endlichen allgemeingültig?

Formal: endl-Allg-FO[σ] $:= \{\varphi : \varphi$ ist ein im Endlichen allgemeingültiger FO[σ]-Satz$\}$

Als Folgerung aus Satz 3.25 und Satz 3.26 erhalten wir:

Korollar 3.28 ((Un-)Entscheidbarkeit des endlichen Allgemeingültigkeitsproblems für FO[σ])

Sei σ eine Signatur.

(a) *Falls σ relational ist und alle Relationssymbole die Stelligkeit 1 haben, so ist das Problem endl-Allg-*FO[σ] *entscheidbar.*

(b) *Falls σ mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthält, so ist das Problem endl-Allg-*FO[σ] *nicht rekursiv aufzählbar.*

Als Folgerung aus Satz 3.25 und Satz 3.26 erhalten wir:

Korollar 3.28 ((Un-)Entscheidbarkeit des endlichen Allgemeingültigkeitsproblems für FO[σ])

Sei σ eine Signatur.

(a) *Falls σ relational ist und alle Relationssymbole die Stelligkeit 1 haben, so ist das Problem endl-Allg-*FO[σ] *entscheidbar.*

(b) *Falls σ mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthält, so ist das Problem endl-Allg-*FO[σ] *nicht rekursiv aufzählbar.*

Bemerkung 3.29

Man vergleiche Korollar 3.28 (b) mit Korollar 3.3:
Die Menge aller allgemeingültigen Sätze ist rekursiv aufzählbar; die Menge aller im Endlichen allgemeingültigen Sätze nicht.

Unter Verwendung des Satzes von Trakhtenbrot kann man die Unentscheidbarkeit vieler konkreter Logikprobleme nachweisen. Im Folgenden wird dies exemplarisch an der Eigenschaft der **Ordnungsinvarianz** von Formeln dargelegt.

Unter Verwendung des Satzes von Trakhtenbrot kann man die Unentscheidbarkeit vieler konkreter Logikprobleme nachweisen. Im Folgenden wird dies exemplarisch an der Eigenschaft der **Ordnungsinvarianz** von Formeln dargelegt.

Definition 3.30 (Ordnungsinvarianz)

Sei σ eine Signatur und sei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, das **nicht** zu σ gehört.

(a) Ein $\text{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$-Satz φ heißt **im Endlichen ordnungsinvariant**, falls für alle **endlichen** σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle linearen Ordnungen $\leqslant_1^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant_2^{\mathcal{A}}$ auf A gilt: $(\mathcal{A}, \leqslant_1^{\mathcal{A}}) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \leqslant_2^{\mathcal{A}}) \models \varphi$.

Unter Verwendung des Satzes von Trakhtenbrot kann man die Unentscheidbarkeit vieler konkreter Logikprobleme nachweisen. Im Folgenden wird dies exemplarisch an der Eigenschaft der **Ordnungsinvarianz** von Formeln dargelegt.

Definition 3.30 (Ordnungsinvarianz)

Sei σ eine Signatur und sei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, das **nicht** zu σ gehört.

(a) Ein $\text{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$-Satz φ heißt **im Endlichen ordnungsinvariant**, falls für alle **endlichen** σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle linearen Ordnungen $\leqslant_1^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant_2^{\mathcal{A}}$ auf A gilt: $(\mathcal{A}, \leqslant_1^{\mathcal{A}}) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \leqslant_2^{\mathcal{A}}) \models \varphi$.

(b) Das **endliche Ordnungsinvarianz-Problem für FO**$[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ ist das folgende Berechnungsproblem:

> Endliches Ordnungsinvarianz-Problem für $\text{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$
>
> *Eingabe:* Ein $\text{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$-Satz φ
>
> *Frage:* Ist φ im Endlichen ordnungsinvariant?

Unter Verwendung des Satzes von Trakhtenbrot kann man die Unentscheidbarkeit vieler konkreter Logikprobleme nachweisen. Im Folgenden wird dies exemplarisch an der Eigenschaft der **Ordnungsinvarianz** von Formeln dargelegt.

Definition 3.30 (Ordnungsinvarianz)

Sei σ eine Signatur und sei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, das **nicht** zu σ gehört.

(a) Ein $\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$-Satz φ heißt **im Endlichen ordnungsinvariant**, falls für alle **endlichen** σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle linearen Ordnungen $\leqslant_1^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant_2^{\mathcal{A}}$ auf A gilt: $(\mathcal{A}, \leqslant_1^{\mathcal{A}}) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \leqslant_2^{\mathcal{A}}) \models \varphi$.

(b) Das **endliche Ordnungsinvarianz-Problem für FO**$[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ ist das folgende Berechnungsproblem:

> Endliches Ordnungsinvarianz-Problem für $\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$
>
> *Eingabe:* Ein $\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$-Satz φ
>
> *Frage:* Ist φ im Endlichen ordnungsinvariant?

Formal: endl-Ordinv-FO$[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ $:=$ $\{\varphi \,:\, \varphi$ ist ein im Endlichen ordnungsinvarianter $\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$-Satz$\}$

Unter Verwendung de Satzes von Trakthenbrot kann man leicht einen Beweis für den folgenden Satz finden:

Satz 3.31 (Unentscheidbarkeit der Ordnungsinvarianz)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Relationssymbol R mit $\mathrm{ar}(R) \geqslant 2$ *und ein weiteres Relationssymbol P mit* $\mathrm{ar}(P) \geqslant 1$ *enthält. Dann ist das Problem endl-Ordinv-*$\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ *nicht entscheidbar.*

Unter Verwendung de Satzes von Trakthenbrot kann man leicht einen Beweis für den folgenden Satz finden:

Satz 3.31 (Unentscheidbarkeit der Ordnungsinvarianz)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Relationssymbol R mit $\mathrm{ar}(R) \geqslant 2$ *und ein weiteres Relationssymbol P mit* $\mathrm{ar}(P) \geqslant 1$ *enthält. Dann ist das Problem endl-Ordinv-*$\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ *nicht entscheidbar.*

Bemerkung 3.32

Der Beweis von Satz 3.31 zeigt sogar, dass das Problem endl-Ordinv-$\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leqslant\}]$ **nicht** semi-entscheidbar, also nicht rekursiv aufzählbar ist.

Kapitel 4:

Gödels Unvollständigkeitssätze

Abschnitt 4.1:

Theorien und Axiomatisierbarkeit

Definition 4.1 (Theorie)

(a) Eine σ-**Theorie** (kurz: **Theorie**) ist eine Menge T von FO[σ]-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

Definition 4.1 (Theorie)

(a) Eine σ-**Theorie** (kurz: **Theorie**) ist eine Menge T von FO[σ]-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

(b) Eine Theorie T ist **vollständig**, wenn für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Eine Theorie T heißt **unvollständig**, wenn sie nicht vollständig ist.

Definition 4.1 (Theorie)

(a) Eine σ-**Theorie** (kurz: **Theorie**) ist eine Menge T von FO[σ]-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

(b) Eine Theorie T ist **vollständig**, wenn für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Eine Theorie T heißt **unvollständig**, wenn sie nicht vollständig ist.

(c) Eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen ist ein **Axiomensystem** für eine Theorie T (kurz: Φ **axiomatisiert** T), wenn gilt:

$$T = \{\varphi \in S_\sigma : \Phi \models \varphi\}.$$

Definition 4.1 (Theorie)

(a) Eine σ-**Theorie** (kurz: **Theorie**) ist eine Menge T von FO[σ]-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

(b) Eine Theorie T ist **vollständig**, wenn für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Eine Theorie T heißt **unvollständig**, wenn sie nicht vollständig ist.

(c) Eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen ist ein **Axiomensystem** für eine Theorie T (kurz: Φ **axiomatisiert** T), wenn gilt:

$$T = \{\varphi \in S_\sigma : \Phi \models \varphi\}.$$

(d) Eine Theorie T heißt **endlich axiomatisierbar**, wenn sie ein endliches Axiomensystem besitzt.

Definition 4.1 (Theorie)

(a) Eine σ-**Theorie** (kurz: **Theorie**) ist eine Menge T von FO[σ]-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

(b) Eine Theorie T ist **vollständig**, wenn für alle FO[σ]-Sätze φ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Eine Theorie T heißt **unvollständig**, wenn sie nicht vollständig ist.

(c) Eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen ist ein **Axiomensystem** für eine Theorie T (kurz: Φ **axiomatisiert** T), wenn gilt:

$$T = \{\varphi \in S_\sigma : \Phi \models \varphi\}.$$

(d) Eine Theorie T heißt **endlich axiomatisierbar**, wenn sie ein endliches Axiomensystem besitzt.

(e) Eine Theorie T heißt **effektiv axiomatisierbar**, wenn sie ein entscheidbares Axiomensystem besitzt.

Beispiel

- Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ eine vollständige σ-Theorie.

Beispiel

- Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ eine vollständige σ-Theorie.
- Die **Gruppentheorie** T_{Gr} ist die Menge aller FO[σ_{Gr}]-Sätze, die aus den Gruppenaxiomen folgen (wobei $\sigma_{Gr} := \{\circ\}$ aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $\circ$ besteht)

Als Folgerung aus Lemma 3.2 erhalten wir

Korollar 4.2 (entscheidbare Theorie)

(a) *Jede effektiv axiomatisierbare Theorie ist rekursiv aufzählbar.*

(b) *Jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie ist entscheidbar*

Abschnitt 4.2:

Die Minimale Arithmetik

Definition 4.3 (Die Theorie Q)

Die **minimale Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Theorie Q, die von den folgenden FO$[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätzen axiomatisiert wird:

$$\begin{aligned}
\psi_{(Q1)} &:= \forall x\ \neg 0 = x + 1 \\
\psi_{(Q2)} &:= \forall x \forall y\ (x + 1 = y + 1 \ \rightarrow\ x = y) \\
\psi_{(Q3)} &:= \forall x\ x + 0 = x \\
\psi_{(Q4)} &:= \forall x \forall y\ x + (y + 1) = (x + y) + 1 \\
\psi_{(Q5)} &:= \forall x\ x \cdot 0 = 0 \\
\psi_{(Q6)} &:= \forall x \forall y\ x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x \\
\psi_{(Q7)} &:= \forall x\ (x \leqslant 0 \ \leftrightarrow\ x = 0) \\
\psi_{(Q8)} &:= \forall x \forall y\ (x \leqslant y + 1 \ \leftrightarrow\ (x = y + 1 \ \vee\ x \leqslant y)) \\
\psi_{(Q9)} &:= \forall x \forall y\, (x \leqslant y \ \vee\ y \leqslant x)
\end{aligned}$$

Lemma 4.4 („Korrektheit“ von Q)

Es gilt $Q \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ *und für alle* $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$*-Formeln* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *und alle* $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\textit{Falls } Q \models \varphi\frac{\underline{m_1} \ \ldots \ \underline{m_k}}{x_1 \ \ldots \ x_k}, \textit{ so } \mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k].$$

Bemerkung

Q ist eine σ_{Ar}-Theorie, für die gilt

(1) Q ist widerspruchsfrei (da erfüllbar durch $\mathcal{N}$),

(2) Q ist effektiv axiomatisierbar (da Q ein endliches Axiomensystem besitzt)

und Q ist **unvollständig** (denn: $\mathcal{N} \models Q \Rightarrow$ falls Q vollständig wäre, so wäre $Q = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Wegen (2) und Korollar 4.2 wäre $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ dann entscheidbar. $\lightning_{\text{zu Satz 3.23}}$).

Das heißt, es gibt Aussagen, die unabhängig von den Axiomen in Q sind.

Gödels erster Unvollständigkeitssatz besagt folgendes:
Jede σ_{Ar}-Theorie T, für die gilt:

(1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar),

(2) T ist effektiv axiomatisierbar (d.h. sie besitzt ein entscheidbares Axiomensystem), und

(3) $T \supseteq Q$ (d.h. T umfasst die „minimale Arithmetik"),

ist **unvollständig**, d.h. es gibt einen FO[σ_{Ar}]-Satz φ, so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt.

Gödels erster Unvollständigkeitssatz besagt folgendes:
Jede σ_{Ar}-Theorie T, für die gilt:

(1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar),

(2) T ist effektiv axiomatisierbar (d.h. sie besitzt ein entscheidbares Axiomensystem), und

(3) $T \supseteq Q$ (d.h. T umfasst die „minimale Arithmetik“),

ist **unvollständig**, d.h. es gibt einen $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$-Satz φ, so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt.

Um Gödels ersten Unvollständigkeitssatz beweisen zu können, müssen wir zunächst ein etwas genaueres Verständnis der „minimalen Arithmetik“ Q erlangen.

Der Σ_1-Transfersatz

Unser erstes „Etappenziel“ dabei ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz)

Für jede Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ und für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi\frac{\underline{\underline{m_1}} \ \ldots \ \underline{\underline{m_k}}}{x_1 \ \ldots \ x_k}$$

Unser erstes „Etappenziel“ dabei ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz)

Für jede Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ und für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k] \iff Q \models \varphi \frac{\underline{m_1} \ \dots \ \underline{m_k}}{x_1 \ \dots \ x_k}$$

Die Richtung „$\Longleftarrow$“ des Σ_1-Transfersatzes folgt unmittelbar aus Lemma 4.4. Um die Richtung „$\Longrightarrow$“ des Σ_1-Transfersatzes zu beweisen, verwenden wir die beiden folgenden Lemmas, die uns ein genaueres Verständnis darüber liefern, wie die Modelle von Q aussehen:

Lemma 4.6

Sei $\mathcal{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathcal{A} \models Q$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m = n$

Lemma 4.6

Sei $\mathcal{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathcal{A} \models Q$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m = n$

(b) $a \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\}$

Lemma 4.6

Sei $\mathcal{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathcal{A} \models Q$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m = n$

(b) $a \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\}$

(c) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m \leqslant n$

Lemma 4.6

Sei $\mathcal{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathcal{A} \models Q$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m = n$

(b) $a \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\}$

(c) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m \leqslant n$

(d) $\underline{m}^{\mathcal{A}} +^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} = \underline{m+n}^{\mathcal{A}}$

Lemma 4.6

Sei $\mathcal{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathcal{A} \models Q$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m = n$

(b) $a \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\}$

(c) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m \leqslant n$

(d) $\underline{m}^{\mathcal{A}} +^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} = \underline{m+n}^{\mathcal{A}}$

(e) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \cdot^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} = \underline{m \cdot n}^{\mathcal{A}}$

Lemma 4.6

Sei $\mathcal{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathcal{A} \models Q$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathcal{A}} = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m = n$

(b) $a \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathcal{A}}, \underline{1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathcal{A}}\}$

(c) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \leqslant^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff m \leqslant n$

(d) $\underline{m}^{\mathcal{A}} +^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} = \underline{m+n}^{\mathcal{A}}$

(e) $\underline{m}^{\mathcal{A}} \cdot^{\mathcal{A}} \underline{n}^{\mathcal{A}} = \underline{m \cdot n}^{\mathcal{A}}$

(f) $0^{\mathcal{A}} = \underline{0}^{\mathcal{A}}$ *und* $1^{\mathcal{A}} = \underline{1}^{\mathcal{A}}$.

Bemerkung 4.7

Ist $\mathcal{A}$ ein Modell von Q, so sei $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ die folgendermaßen definierte Substruktur von $\mathcal{A}$:

Bemerkung 4.7

Ist $\mathcal{A}$ ein Modell von Q, so sei $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ die folgendermaßen definierte Substruktur von $\mathcal{A}$:

- Universum von $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$: $N_{\mathcal{A}} := \{\underline{n}^{\mathcal{A}} : n \in \mathbb{N}\}$

Bemerkung 4.7

Ist $\mathcal{A}$ ein Modell von Q, so sei $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ die folgendermaßen definierte Substruktur von $\mathcal{A}$:

- Universum von $\mathcal{N}_\mathcal{A}$: $N_\mathcal{A} := \{\underline{n}^\mathcal{A} : n \in \mathbb{N}\}$
- Für alle $a, b \in N_\mathcal{A}$ sei
  - $a \leqslant^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} b \;:\Leftrightarrow\; a \leqslant^\mathcal{A} b$
  - $a +^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} b \;:=\; a +^\mathcal{A} b$
  - $a \cdot^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} b \;:=\; a \cdot^\mathcal{A} b$

  Addition und Multiplikation sind wegen Lemma 4.6 (d), (e) wohldefiniert (für $a = \underline{m}^\mathcal{A}$ und $b = \underline{n}^\mathcal{A}$ gilt: $a +^\mathcal{A} b = \underline{m+n}^\mathcal{A} \in N_\mathcal{A}$).

Bemerkung 4.7

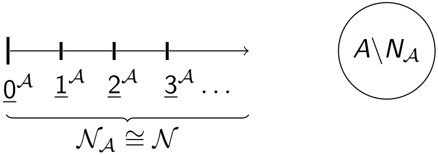
Ist $\mathcal{A}$ ein Modell von Q, so sei $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ die folgendermaßen definierte Substruktur von $\mathcal{A}$:

- Universum von $\mathcal{N}_\mathcal{A}$: $N_\mathcal{A} := \{\underline{n}^\mathcal{A} : n \in \mathbb{N}\}$
- Für alle $a, b \in N_\mathcal{A}$ sei
  - $a \leqslant^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} b \ :\Leftrightarrow\ a \leqslant^\mathcal{A} b$
  - $a +^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} b \ :=\ a +^\mathcal{A} b$
  - $a \cdot^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} b \ :=\ a \cdot^\mathcal{A} b$

  Addition und Multiplikation sind wegen Lemma 4.6 (d), (e) wohldefiniert (für $a = \underline{m}^\mathcal{A}$ und $b = \underline{n}^\mathcal{A}$ gilt: $a +^\mathcal{A} b = \underline{m+n}^\mathcal{A} \in N_\mathcal{A}$).
- Ferner sei $0^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} := \underline{0}^\mathcal{A}$ und $1^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} := \underline{1}^\mathcal{A}$ (klar: $0^{\mathcal{N}_\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{N}_\mathcal{A}} \in N_\mathcal{A}$ wegen Lemma 4.6 (f)).

Beachte

Aus Lemma 4.6 folgt: $\mathcal{N}_\mathcal{A} \cong \mathcal{N}$, da $\pi : (n \mapsto \underline{n}^\mathcal{A})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Isomorphismus ist. Außerdem gilt wegen Lemma 4.6 (b) und Axiom $\psi_{(Q9)}$ für alle $a \in A \setminus N_\mathcal{A}$, dass $\underline{n}^\mathcal{A} \leqslant a$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$). Somit ist $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ ein „Anfangsstück“ von $\mathcal{A}$ bzgl. $\leqslant^\mathcal{A}$.



Zum Beweis des Σ_1-Transfersatzes benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 4.8

Für jedes Modell $\mathcal{A}$ von Q gilt:

(a) *Ist $t(x_1, \ldots, x_k)$ ein σ_{Ar}-Term und sind $n, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:*

$$t^{\mathcal{A}}[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}] = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff t^{\mathcal{N}}[m_1, \ldots, m_k] = n$$

Zum Beweis des Σ_1-Transfersatzes benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 4.8

Für jedes Modell $\mathcal{A}$ von Q gilt:

(a) *Ist $t(x_1, \ldots, x_k)$ ein σ_{Ar}-Term und sind $n, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:*

$$t^{\mathcal{A}}[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}] = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff t^{\mathcal{N}}[m_1, \ldots, m_k] = n$$

(b) *Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta_0$ und sind $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ so gilt:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}] \iff \mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$$

Zum Beweis des Σ_1-Transfersatzes benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 4.8

Für jedes Modell $\mathcal{A}$ von Q gilt:

(a) *Ist $t(x_1, \ldots, x_k)$ ein σ_{Ar}-Term und sind $n, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:*

$$t^{\mathcal{A}}[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}] = \underline{n}^{\mathcal{A}} \iff t^{\mathcal{N}}[m_1, \ldots, m_k] = n$$

(b) *Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta_0$ und sind $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ so gilt:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}] \iff \mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$$

(c) *Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \Sigma_1$ und sind $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ so gilt:*

$$\text{Falls } \mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k], \text{ so } \mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}]$$

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz): Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz): Sei $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$.Zu zeigen:
$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$.

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz): Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.Zu zeigen:
$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.
„$\Longleftarrow$“ : folgt aus Lemma 4.4.

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz): Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.Zu zeigen:
$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.
„$\Longleftarrow$“ : folgt aus Lemma 4.4.
„$\Longrightarrow$“ : Es gelte $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$.

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz): Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.Zu zeigen:
$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.
„$\Longleftarrow$“ : folgt aus Lemma 4.4.
„$\Longrightarrow$“ : Es gelte $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von Q.

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz): Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.Zu zeigen:
$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.
„$\Longleftarrow$“ : folgt aus Lemma 4.4.
„$\Longrightarrow$“ : Es gelte $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von Q.Nach Lemma 4.8 (c) gilt dann $\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}]$.

Wir können nun den Σ_1-Tranfersatz beweisen:

Beweis von Satz 4.5 (Der Σ_1-Transfersatz): Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.Zu zeigen:
$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.
„$\Longleftarrow$" : folgt aus Lemma 4.4.
„$\Longrightarrow$" : Es gelte $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von Q.Nach Lemma 4.8 (c) gilt dann $\mathcal{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathcal{A}}]$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt dann $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

$\square_{\text{Satz 4.5 (Der } \Sigma_1\text{-Transfersatz)}}$

Repräsentierbarkeit von Relationen und Funktionen

Als zweiten Schritt zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz benötigen wir den folgenden Begriff der **Repräsentierbarkeit** von Relationen und Funktionen.

Als zweiten Schritt zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz benötigen wir den folgenden Begriff der **Repräsentierbarkeit** von Relationen und Funktionen.

Definition 4.9 (Repräsentierbarkeit einer Relation)

Sei T eine Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ eine k-stellige Relation.

(a) Eine $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ **repräsentiert** R **in** T, falls für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:
   - Falls $(m_1, \ldots, m_k) \in R$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$
   - Falls $(m_1, \ldots, m_k) \notin R$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

Als zweiten Schritt zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz benötigen wir den folgenden Begriff der **Repräsentierbarkeit** von Relationen und Funktionen.

Definition 4.9 (Repräsentierbarkeit einer Relation)

Sei T eine Menge von FO[σ_{Ar}]-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ eine k-stellige Relation.

(a) Eine FO[σ_{Ar}]-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ **repräsentiert** R **in** T, falls für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:
- Falls $(m_1, \ldots, m_k) \in R$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$
- Falls $(m_1, \ldots, m_k) \notin R$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

(b) R heißt **repräsentierbar in** T, wenn es eine FO[σ_{Ar}]-Formel gibt, die R in T repräsentiert.

Definition 4.10 (Repräsentierbarkeit einer Funktion)

Sei T eine Menge von FO[σ_{Ar}]-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine (totale) Funktion.

(a) Eine FO[σ_{Ar}]-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ **repräsentiert** f **in** T, wenn gilt:

(1) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1.1) Falls $f(m_1, \ldots, m_k) = n$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$

(1.2) Falls $f(m_1, \ldots, m_k) \neq n$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$T \models \forall y_1 \, \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2) \big) \to y_1 = y_2 \Big)$$

Definition 4.10 (Repräsentierbarkeit einer Funktion)

Sei T eine Menge von FO[σ_{Ar}]-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine (totale) Funktion.

(a) Eine FO[σ_{Ar}]-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ **repräsentiert** f **in** T, wenn gilt:

(1) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1.1) Falls $f(m_1, \ldots, m_k) = n$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$

(1.2) Falls $f(m_1, \ldots, m_k) \neq n$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$T \models \forall y_1 \, \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2)\big) \to y_1 = y_2 \Big)$$

Bemerkung

Falls $Q \subseteq T$, so folgt (1.2) aus (1.1) und (2). Insbesondere ist also der Graph von f repräsentierbar in T (durch die Formel φ) (Details: Übung).

Das nächste „Etappenziel" zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4.11 (Repräsentierbarkeit (in Q) der berechenbaren Funktionen und entscheidbaren Relationen)

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

(a) *Jede TM-berechenbare (totale) Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist in Q repräsentierbar.*

Das nächste „Etappenziel“ zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4.11 (Repräsentierbarkeit (in Q) der berechenbaren Funktionen und entscheidbaren Relationen)

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

(a) *Jede TM-berechenbare (totale) Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist in Q repräsentierbar.*

(b) *Jede TM-entscheidbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist in Q repräsentierbar.*

Lemma 4.12

(a) *Jede Δ_0-definierbare totale Funktion ist in Q repräsentierbar.*

(b) *Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine TM-berechenbare totale Funktion. Dann gibt es Δ_0-definierbare Funktionen $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$f(m_1, \ldots, m_k) \;=\; h(m_1, \ldots, m_k, g(m_1, \ldots, m_k))$$

(c) *Seien $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ in Q repräsentierbar, und sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ so definiert, dass für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$f(m_1, \ldots, m_k) \;=\; h(m_1, \ldots, m_k, g(m_1, \ldots, m_k)).$$

Dann ist f in Q repräsentierbar.

Beachte

Satz 4.11 (a) folgt unmittelbar aus Lemma 4.12.

Abschnitt 4.3:

Der Fixpunktsatz und die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe

Satz 4.13 (Der Fixpunktsatz)

Sei T eine σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es für jede $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Formel $\varphi(y)$ einen* $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Satz χ, so dass gilt*

$$T \models (\chi \ \leftrightarrow \ \varphi(\underline{n_\chi}))$$

(D.h.: Für jede Formel $\varphi(y)$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einen Satz χ, s.d. gilt:

- *n ist die Gödelnummer von χ, und*
- *in jedem Modell $\mathcal{A}$ von T gibt die Formel $\varphi(\underline{n})$ an, ob der Satz χ erfüllt ist oder nicht.)*

Satz 4.13 (Der Fixpunktsatz)

Sei T eine σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es für jede $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Formel $\varphi(y)$ einen* $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Satz χ, so dass gilt*

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi})\right)$$

(D.h.: Für jede Formel $\varphi(y)$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einen Satz χ, s.d. gilt:

- *n ist die Gödelnummer von χ, und*
- *in jedem Modell $\mathcal{A}$ von T gibt die Formel $\varphi(\underline{n})$ an, ob der Satz χ erfüllt ist oder nicht.)*

Beachte

Anschaulich besagt χ „Die Eigenschaft φ trifft für mich zu".

Als einfache Folgerung des Fixpunktsatzes erhalten wir folgendes:

Satz 4.14 („Unmöglichkeit der Selbstrepräsentation“)

*Eine widerspruchfreie Theorie, die Q erweitert, ist **nicht** in sich selbst repräsentierbar.*

Als einfache Folgerung des Fixpunktsatzes erhalten wir folgendes:

Satz 4.14 („Unmöglichkeit der Selbstrepräsentation")

*Eine widerspruchfreie Theorie, die Q erweitert, ist **nicht** in sich selbst repräsentierbar.*

Präzise

Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann ist die Relation

$$R_T \;:=\; \{n_\xi \,:\, \xi \in T\} \subseteq \mathbb{N}$$

(d.h. die Menge aller Gödelnummern von Sätzen in T) **nicht** in T repräsentierbar.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.14 (für $T := \operatorname{Th}(\mathcal{N})$) erhalten wir den folgenden Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der „Wahrheit“.
(Einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$-Satz ξ bezeichnen wir hierbei als **„wahr“**, wenn er vom Standardmodell der Arithmetik $(\mathcal{N})$ erfüllt wird.)

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.14 (für $T := \mathrm{Th}(\mathcal{N})$) erhalten wir den folgenden Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der „Wahrheit".
(Einen FO[σ_{Ar}]-Satz ξ bezeichnen wir hierbei als **„wahr"**, wenn er vom Standardmodell der Arithmetik ($\mathcal{N}$) erfüllt wird.)

Satz 4.15 (Der Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit)

Die Menge aller „wahren" arithmetischen Sätze ist nicht arithmetisch axiomatisierbar.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.14 (für $T := \text{Th}(\mathcal{N})$) erhalten wir den folgenden Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der „Wahrheit“.
(Einen FO[σ_{Ar}]-Satz ξ bezeichnen wir hierbei als **„wahr“**, wenn er vom Standardmodell der Arithmetik ($\mathcal{N}$) erfüllt wird.)

Satz 4.15 (Der Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit)

Die Menge aller „wahren“ arithmetischen Sätze ist nicht arithmetisch axiomatisierbar.

Präzise

Es gibt keine FO[σ_{Ar}]-Formel $\varphi(y)$, so dass für alle FO[σ_{Ar}]-Sätze ξ gilt:

$$\mathcal{N} \models \varphi(\underline{n_\xi}) \iff \mathcal{N} \models \xi.$$

Satz 4.16 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)

Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar. Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisierbar).

Satz 4.16 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)

Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar. Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisierbar).

Beweis: Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Angenommen, T ist entscheidbar, d.h. die Relation

$$R_T := \{n_\xi : \xi \in T\} \subseteq \mathbb{N}$$

ist entscheidbar.

Satz 4.16 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)

Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar.
Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisierbar).

Beweis: Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Angenommen, T ist entscheidbar, d.h. die Relation

$$R_T := \{n_\xi : \xi \in T\} \subseteq \mathbb{N}$$

ist entscheidbar.
Gemäß Satz 4.11 (b) ist R_T dann in Q repräsentierbar.

Satz 4.16 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)

Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar.
Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisierbar).

Beweis: Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Angenommen, T ist entscheidbar, d.h. die Relation

$$R_T := \{n_\xi : \xi \in T\} \subseteq \mathbb{N}$$

ist entscheidbar.
Gemäß Satz 4.11 (b) ist R_T dann in Q repräsentierbar.Wegen $Q \subseteq T$ ist R_T dann auch in T repräsentierbar.

Satz 4.16 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)

Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar.
Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisierbar).

Beweis: Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Angenommen, T ist entscheidbar, d.h. die Relation

$$R_T := \{n_\xi : \xi \in T\} \subseteq \mathbb{N}$$

ist entscheidbar.
Gemäß Satz 4.11 (b) ist R_T dann in Q repräsentierbar.Wegen $Q \subseteq T$ ist R_T dann auch in T repräsentierbar. $\lightning_{\text{zu Satz 4.14}}$

$\square$

Als einfache Folgerung aus Satz 4.16 und Korollar 3.3 erhalten wir

Satz 4.17

Die Menge aller allgemeingültigen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$*-Sätze ist rekursiv aufzählbar, aber* ***nicht*** *entscheidbar.*

Als einfache Folgerung aus Satz 4.16 und Korollar 3.3 erhalten wir

Satz 4.17

Die Menge aller allgemeingültigen $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Sätze ist rekursiv aufzählbar, aber* ***nicht*** *entscheidbar.*

Folgerung 4.17'

Die Menge aller ***erfüllbaren*** $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Sätze ist* ***nicht*** *rekursiv aufzählbar.*

Abschnitt 4.4:

Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Gödels erster Unvollständigkeitssatz folgt unmittelbar aus Satz 4.16 und Korollar 4.2 (b).

Gödels erster Unvollständigkeitssatz folgt unmittelbar aus Satz 4.16 und Korollar 4.2 (b).

Satz 4.18 (Gödels erster Unvollständigkeitssatz)

Jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unvollständig.

Gödels erster Unvollständigkeitssatz folgt unmittelbar aus Satz 4.16 und Korollar 4.2 (b).

Satz 4.18 (Gödels erster Unvollständigkeitssatz)

Jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unvollständig.

Beweis: Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Angenommen, T ist vollständig. Gemäß Korollar 4.2 ist T dann entscheidbar. $\lightning_{\text{zu Satz 4.16}}$

$\square$

Bezüglich des ersten Gödels Unvollständigkeitssatzes können wir sogar explizit eine Formel φ_T angeben, die unabhängig von T ist, d.h. für die weder $T \models \varphi_T$ noch $T \models \neg\varphi_T$ gilt.

Bezüglich des ersten Gödels Unvollständigkeitssatzes können wir sogar explizit eine Formel φ_T angeben, die unabhängig von T ist, d.h. für die weder $T \models \varphi_T$ noch $T \models \neg\varphi_T$ gilt.

Um eine solche Formel φ_T zu konstruieren, betrachten wir im Folgenden Beweise im Sequenzenkalkül und stellen fest, dass die Beweisbarkeit einer Aussage durch eine Σ_1-Formel definiert werden kann:

Bezüglich des ersten Gödels Unvollständigkeitssatzes können wir sogar explizit eine Formel φ_T angeben, die unabhängig von T ist, d.h. für die weder $T \models \varphi_T$ noch $T \models \neg\varphi_T$ gilt.

Um eine solche Formel φ_T zu konstruieren, betrachten wir im Folgenden Beweise im Sequenzenkalkül und stellen fest, dass die Beweisbarkeit einer Aussage durch eine Σ_1-Formel definiert werden kann:

Lemma 4.19 (Existenz von „Beweisbarkeitsformeln")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gibt es eine Σ_1-Formel $\text{Bew}_T(x)$ *so dass für jeden* $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$*-Satz φ gilt:*

$$T \models \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi].$$

Beweis:

$$T \text{ effektiv axiomatisierbar} \quad \overset{\text{Kor. 4.2}}{\Longrightarrow} \quad T \text{ r.e.}$$

$\square$

Beweis:

$$T \text{ effektiv axiomatisierbar} \stackrel{\text{Kor. 4.2}}{\Longrightarrow} T \text{ r.e.}$$

$$\Longrightarrow \quad \{ n_\varphi \, : \, \varphi \text{ FO}[\sigma_{\text{Ar}}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \} \text{ r.e.}$$

$\square$

Beweis:

$$T \text{ effektiv axiomatisierbar } \stackrel{\text{Kor. 4.2}}{\Longrightarrow} T \text{ r.e.}$$

$$\Longrightarrow \quad \{n_\varphi \,:\, \varphi \text{ FO}[\sigma_{\text{Ar}}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi\} \text{ r.e.}$$

$$\stackrel{\text{Satz 3.21}}{\Longrightarrow} \{n_\varphi \,:\, \varphi \text{ FO}[\sigma_{\text{Ar}}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi\} \text{ ist } \Sigma_1\text{-definierbar,}$$

$\square$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& T \text{ effektiv axiomatisierbar} \overset{\text{Kor. 4.2}}{\Longrightarrow} T \text{ r.e.} \\
& \Longrightarrow \quad \{n_\varphi : \varphi \ \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi\} \text{ r.e.} \\
& \overset{\text{Satz 3.21}}{\Longrightarrow} \{n_\varphi : \varphi \ \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi\} \text{ ist } \Sigma_1\text{-definierbar,}
\end{aligned}
$$

d.h. es gibt eine Σ_1-Formel $\mathrm{Bew}_T(x)$ s.d. f.a. $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätze φ gilt

$$
\mathcal{N} \models \mathrm{Bew}_T[n_\varphi] \iff T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} T \models \varphi.
$$

$\square$

Notation 4.20 („Beweisbarkeitsformeln“)

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T sei im Folgenden $\text{Bew}_T(x)$ eine fest gewählte Σ_1-Formel, so dass für alle $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätze φ gilt

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi].$$

Notation 4.20 („Beweisbarkeitsformeln“)

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T sei im Folgenden $\text{Bew}_T(x)$ eine fest gewählte Σ_1-Formel, so dass für alle $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätze φ gilt

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi].$$

Aus Lemma 4.19 und dem Σ_1-Transfersatz (Satz 4.5) folgt unmittelbar:

Korollar 4.21

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gilt für jeden $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-*Satz φ:*

(a) $T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff Q \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$.

Notation 4.20 („Beweisbarkeitsformeln")

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T sei im Folgenden $\text{Bew}_T(x)$ eine fest gewählte Σ_1-Formel, so dass für alle $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätze φ gilt

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \mathcal{N} \models \text{Bew}_T[n_\varphi].$$

Aus Lemma 4.19 und dem Σ_1-Transfersatz (Satz 4.5) folgt unmittelbar:

Korollar 4.21

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gilt für jeden $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-*Satz φ:*

(a) $T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff Q \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$.

(b) *Wenn $Q \subseteq T$, dann gilt:*

$$\textit{Falls } T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi, \textit{ so } T \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}).$$

Lemma 4.22 (Existenz von „Gödelsätzen")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es einen $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Satz χ mit*

$$T \models \big(\chi \leftrightarrow \neg \mathsf{Bew}_T(\underline{n_\chi})\big) \qquad (*)$$

Lemma 4.22 (Existenz von „Gödelsätzen")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es einen $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Satz χ mit*

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \neg \mathsf{Bew}_T(\underline{n_\chi})\right) \qquad (*)$$

(Anschaulich besagt χ folgendes: „ich bin nicht aus T beweisbar").

Lemma 4.22 (Existenz von „Gödelsätzen")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$*-Satz χ mit*

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})\right) \tag{$*$}$$

(Anschaulich besagt χ folgendes: „ich bin nicht aus T beweisbar").

Beweis: Folgt direkt aus dem Fixpunktsatz (Satz 4.13) für $\varphi(y) := \neg \mathrm{Bew}_T(y)$.

□

Lemma 4.22 (Existenz von „Gödelsätzen")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$*-Satz χ mit*

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})\right) \qquad (*)$$

(Anschaulich besagt χ folgendes: „ich bin nicht aus T beweisbar").

Beweis: Folgt direkt aus dem Fixpunktsatz (Satz 4.13) für $\varphi(y) := \neg \mathrm{Bew}_T(y)$.

□

Notation 4.23

Ein Satz χ der die Eigenschaft $(*)$ besitzt, heißt **Gödelsatz für** T.

Gödelsätze liefern konkrete Beispiele für die Unvollständigkeit von T (vgl. Gödels ersten Unvollständigkeitssatz).

Gödelsätze liefern konkrete Beispiele für die Unvollständigkeit von T (vgl. Gödels ersten Unvollständigkeitssatz).

Satz 4.24 (Präzisierung von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, und sei χ ein Gödelsatz für T.
Dann ist χ unabhängig von T, d.h. es gilt weder $T \models \chi$ noch $T \models \neg\chi$.

Abschnitt 4.5:

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Definition 4.25 (Konsistenzsatz Wfrei_T)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Der **Konsistenzsatz für** T ist der $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz

$$\text{Wfrei}_T \ := \ \neg\text{Bew}_T(\underline{n_{0=1}}).$$

Definition 4.25 (Konsistenzsatz Wfrei_T)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Der **Konsistenzsatz für** T ist der $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{Ar}}]$-Satz

$$\mathsf{Wfrei}_T \;:=\; \neg \mathsf{Bew}_T(\underline{n_{0=1}}).$$

Lemma 4.26

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ gilt

$$T \textit{ ist widerspruchsfrei} \iff \mathcal{N} \models \mathsf{Wfrei}_T.$$

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz besagt, dass $T \not\vdash_{\mathfrak{K}} \text{Wfrei}_T$, sofern T eine effektiv axiomatisierbare, widerspruchsfreie Erweiterung der sogenannten **Peano-Arithmetik** ist.

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz besagt, dass $T \not\vdash_{\mathfrak{K}} \text{Wfrei}_T$, sofern T eine effektiv axiomatisierbare, widerspruchsfreie Erweiterung der sogenannten **Peano-Arithmetik** ist.

Definition 4.27 (Die Peano-Arithmetik *PA*)

Die Peano-Arithmetik *PA* ist die σ_{Ar}-Theorie, die von den Axiomen $\psi_{(Q1)}, \ldots, \psi_{(Q9)}$ der Theorie Q sowie von den folgenden **Induktionsaxiomen** $\psi_{(Ind,\varphi)}$ axiomatisiert wird:
Für jede $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel $\varphi(x)$ sei

$$\psi_{(Ind,\varphi)} \ := \ \Big(\big(\underbrace{\varphi(\underline{0})}_{\text{„Induktionsanfang“}} \ \wedge \ \underbrace{\forall x \big(\varphi(x) \to \varphi(x+1) \big) \big)}_{\text{„Induktionsschritt“}} \to \forall x\, \varphi(x) \Big)$$

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz besagt, dass $T \not\models_{\mathfrak{K}} \text{Wfrei}_T$, sofern T eine effektiv axiomatisierbare, widerspruchsfreie Erweiterung der sogenannten **Peano-Arithmetik** ist.

Definition 4.27 (Die Peano-Arithmetik PA)

Die Peano-Arithmetik PA ist die σ_{Ar}-Theorie, die von den Axiomen $\psi_{(Q1)}, \ldots, \psi_{(Q9)}$ der Theorie Q sowie von den folgenden **Induktionsaxiomen** $\psi_{(Ind,\varphi)}$ axiomatisiert wird:
Für jede FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formel $\varphi(x)$ sei

$$\psi_{(Ind,\varphi)} \; := \; \Big(\big(\underbrace{\varphi(\underline{0})}_{\text{„Induktionsanfang"}} \wedge \underbrace{\forall x \big(\varphi(x) \to \varphi(x+1) \big) \big)}_{\text{„Induktionsschritt"}} \to \forall x\, \varphi(x) \Big)$$

Klar

- $\mathcal{N} \models PA$
- $Q \subseteq PA \subseteq \text{Th}(\mathcal{N})$
- PA ist effektiv axiomatisierbar.

Wir können nun Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz formulieren:

Satz 4.28 (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz)

Für jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $PA \subseteq T$ gilt:

$$T \not\vdash_{\mathfrak{K}} \mathsf{Wfrei}_T$$

(d.h. die Widerspruchsfreiheit von T kann nicht mit den in T verfügbaren Mitteln bewiesen werden).

Wir können nun Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz formulieren:

Satz 4.28 (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz)

Für jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $PA \subseteq T$ gilt:

$$T \not\vdash_{\mathfrak{K}} \mathrm{Wfrei}_T$$

(d.h. die Widerspruchsfreiheit von T kann nicht mit den in T verfügbaren Mitteln bewiesen werden).

Satz 4.28 lässt sich sehr leicht beweisen, wenn man den folgenden **Satz von Löb** verwendet:

Wir können nun Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz formulieren:

Satz 4.28 (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz)

Für jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $PA \subseteq T$ gilt:

$$T \nvdash_{\mathfrak{K}} \mathrm{Wfrei}_T$$

(d.h. die Widerspruchsfreiheit von T kann nicht mit den in T verfügbaren Mitteln bewiesen werden).

Satz 4.28 lässt sich sehr leicht beweisen, wenn man den folgenden **Satz von Löb** verwendet:

Satz 4.29 (Der Satz von Löb)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$. Dann gilt für jeden $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$*-Satz φ:*

$$T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{K}} (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi).$$

Um den Satz von Löb zu beweisen, verwendet man folgendes Lemma:

Lemma 4.30

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit PA $\subseteq T$. Dann gilt für alle FO[σ_{Ar}]-*Sätze φ und ψ:*

(a) *Falls $T \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so $T \vdash_{\mathfrak{K}} \text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$.*

(b) $T \vdash_{\mathfrak{K}} \Big(\text{Bew}_T(\underline{n_{\varphi\to\psi}}) \to \big(\text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \text{Bew}_T(\underline{\psi})\big)\Big)$.

(c) $T \vdash_{\mathfrak{K}} \Big(\text{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \text{Bew}_T(\underline{n_{\text{Bew}_T(\underline{n_\varphi})}})\Big)$.