Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. Januar 2023

Logik in der Informatik

Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 13

Abgabe: *bis 6. Februar 2023, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 13 auf der Moodle-Plattform.

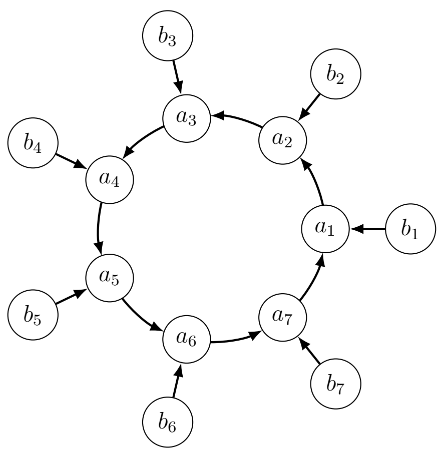
Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

Definition: Für eine σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sagen wir, dass $\mathcal{A}$ *eine Krone der Länge n besitzt*, wenn es Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ mit $|\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}| = 2n$ gibt, so dass die Relation $E^{\mathcal{A}}$ die folgenden Kanten enthält:

- (a_i, a_{i+1}) für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und (a_n, a_1) und
- (b_i, a_i) für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Eine Krone der Länge 7 sieht zum Beispiel wie folgt aus:



(a) Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ_n an, sodass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_n \iff \mathcal{A}$ enthält eine Krone der Länge n.

(b) Geben Sie eine Menge Ψ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen an, die die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ axiomatisiert, für die gilt: Es gibt keine natürliche Zahl $n \geq 2$, so dass $\mathcal{A}$ eine Krone der Länge n besitzt.

(c) Verwenden Sie den Endlichkeitssatz der Logik erster Stufe, um Folgendes zu beweisen: Die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$, die eine Krone der Länge ≥ 2 besitzen, ist *nicht* erststufig axiomatisierbar. Präzise: Zeigen Sie, dass es keine Menge Φ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \Phi \quad \iff \quad \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2 \text{, so dass } \mathcal{A} \text{ eine Krone der Länge } n \text{ besitzt.}$$

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol, R ein 2-stelliges Relationssymbol und f_0, f_1 zwei 1-stellige Funktionssymbole sind.

Beweisen Sie die folgende Aussage aus Korollar 4.41 aus dem Vorlesungsskript:

Das Folgerungsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *ist nicht entscheidbar.*

(b) Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol, f ein 1-stelliges Funktionssymbol und seien c und d Konstantensymbole.

Im Folgenden ist für jedes $i \in \{1, 2\}$ eine Signatur σ_i und ein $\mathsf{FO}[\sigma_i]$-Satz φ_i gegeben.

(1) Sei $\sigma_1 := \{R, f, c\}$ und sei φ_1 der folgende $\mathsf{FO}[\sigma_1]$-Satz:

$$\forall x \forall y \Big(\big(R(x,y) \ \rightarrow \ y{=}f(x) \big) \ \wedge \ \big(y{=}f(x) \ \rightarrow \ R(x,y) \big) \Big)$$

(2) Sei $\sigma_2 := \{R, c, d\}$ und sei φ_2 der folgende $\mathsf{FO}[\sigma_2]$-Satz:

$$\exists x \exists y \left(R(x,d) \ \wedge \ R(c,y) \right) \ \wedge \ \forall x \forall y \left(R(x,y) \ \rightarrow \ \neg\, x{=}y \right)$$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$ eine σ_i-Herbrandstruktur $\mathcal{A}_i$ und eine σ_i-Herbrandstruktur $\mathcal{B}_i$ an, so dass gilt:

$$\mathcal{A}_i \models \varphi_i \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B}_i \not\models \varphi_i.$$

Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{A}_i \models \varphi_i$ bzw. $\mathcal{B}_i \not\models \varphi_i$ gilt.

(c) Sei $\sigma := \{R, f\}$, wobei R ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Transformieren Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\forall x \, \neg \Big(\neg f(x){=}y \ \ \vee \ \ \forall y \, R(x,y) \Big)$$

in einen zu φ erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$-Satz $\hat{\varphi}$ in Skolemform. Gehen Sie dabei vor wie im Beweis von Satz 4.52 im Vorlesungsskript. Geben Sie insbesondere auch die Signatur $\hat{\sigma}$ sowie die Formeln an, die nach jedem der Schritte 1, 2 und 3 des Beweises entstehen.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 8 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Die Bearbeitung der Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Implementieren Sie ein Prädikat `sat/1`, so dass eine Anfrage

```
?- sat(F).
```

für eine aussagenlogische Formel `F` genau dann erfolgreich ist, wenn `F` erfüllbar ist.

Hinweise: Ihr Prädikat soll zu der Formel `F` zuerst eine *erfüllbarkeitsäquivalente* 3-*KNF* konstruieren, und anschließend deren Erfüllbarkeit mit dem DPLL-Algorithmus testen. Es macht nichts, wenn Ihr Prädikat für eine erfüllbare Formel mehrfach

```
true.
```

ausgibt.

(b) Für Vergleiche von SAT-Solvern werden 3-KNF oft im sogenannten DIMACS-Format angegeben.[1] Implementieren Sie ein Prädikat `sat_dimacs/1`, welches als Argument den Namen einer Datei erhält, so dass beispielsweise die Anfrage

```
?- sat_dimacs('knf.cnf').
```

genau dann erfolgreich ist, wenn die in der Datei `knf.cnf` repräsentierte 3-KNF erfüllbar ist. Ist diese nicht erfüllbar, soll das Ergebnis `false.` sein.

Sie können in Ihrer Implementation davon ausgehen, dass die aufgerufene Datei im aktuellen Verzeichnis existiert und dem DIMACS-Standard entspricht.

Sie können zur Lösung dieser Aufgabe alle Prolog-Module verwenden, die Sie unter

`https://hu.berlin/proLog2223`

vorfinden. Dies gilt insbesondere für die Module `tseitin.pl` und `dpll.pl`.[2] Dort finden Sie auch Beispieldateien im DIMACS-Format.

[1] So waren auch auf der SAT Competition 2022 [Link: `http://www.satcompetition.org/`] die 2009 festgelegten Regeln gültig, welche auch für uns das DIMACS-Format definieren sollen (vgl. `http://www.satcompetition.org/2009/format-benchmarks2009.html`).

[2] Verfügbar ab 30.01.23 ca.: 20:00 Uhr.