Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. Dezember 2022

Logik in der Informatik

Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 9. Januar 2023, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 9 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

(a) Beweisen Sie folgende Aussage:
Für alle $m \in \mathbb{N}$, alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:

> Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

(b) Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der logischen Reduktion (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.58).

Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Sei 2-*COL* die Klasse aller gerichteten zweifärbbaren Graphen, d.h. aller σ-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ für die gilt:

> Es gibt eine Funktion $f : A \to \{rot, blau\}$, so dass für jede Kante (a, b) in $E^{\mathcal{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

Zeigen Sie: Die Klasse 2-*COL* ist *nicht FO-definierbar*.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

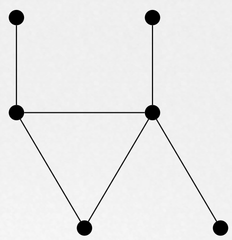
Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

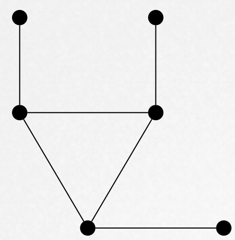
(a) Seien x, y, z drei paarweise verschiedene Variablen. Betrachten Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln

$$\begin{aligned} \varphi &:= \Big(E(z,z) \ \wedge\ \exists x\, \forall y\, x{=}y \Big) \\ \psi_1 &:= \Big(E(z,z) \ \wedge\ \forall y\, \exists x\, x{=}y \Big) \\ \psi_2 &:= \Big(\exists z\, \forall y\, y{=}z \ \wedge\ E(x,y) \Big) \end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $i \in \{1,2\}$ an, ob $\varphi \equiv \psi_i$ gilt und beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) In der folgenden Darstellung der Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u,v) und (v,u):

$\mathcal{A}$: 

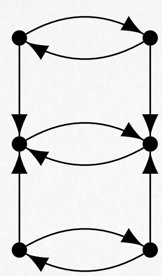
$\mathcal{B}$: 

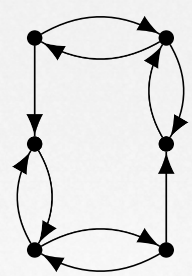
- **(i)** Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für Duplicator im 2-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
- **(ii)** Welches ist das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel beschreiben.
- **(iii)** Geben Sie für Ihre Zahl m aus **(ii)** einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe m an, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

Begründen Sie, warum für Ihren Satz φ tatsächlich $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt.

(c) Betrachten Sie die folgenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

Für

$$\varphi \ := \ \exists x \exists y \forall z \Big(E(z,x) \ \vee \ E(z,y) \Big)$$

gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

- **(i)** Leiten Sie aus dem $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ eine Gewinnstrategie für Spoiler im EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ her. Geben Sie an, wie viele Runden Spoiler benötigt, wenn er dieser Strategie folgt. Beschreiben Sie die Strategie ähnlich wie in der in der Vorlesung behandelten Beweisidee zu Satz 3.51 im Vorlesungsskript.

(ii) Existiert eine bessere Gewinnstrategie für Spoiler? D.h. eine Strategie, mit der er in weniger Runden das Spiel gewinnt? Wenn ja, dann beschreiben Sie eine solche Strategie. Wenn nein, dann begründen Sie dieses.

Aufgabe 4:

Bearbeiten Sie Aufgabe 4 von Blatt 8.