Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

9. Dezember 2022

Logik in der Informatik

Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 19. Dezember 2022, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 8 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

(a) Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathcal{D}$ aus der Vorlesung.

Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{KINO}}]$-Formel φ und ein Variablentupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ an, die die Anfrage beschreiben. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{D}}$.

(i) Geben Sie alle Kombinationen aus Name eines Kinos und Uhrzeit aus, die einer Vorstellung des Films Gravity entsprechen.

(ii) Geben Sie alle Paare von Namen von Kinos aus, die sich im gleichen Stadtteil befinden.

(iii) Gib alle Titel von Filmen aus, die in genau einem Kino gespielt werden, zusammen mit den Anfangszeiten des jeweiligen Filmes.

(iv) Gib alle Regisseure aus, die in einem Film Regie geführt und auch selbst mitgespielt haben, der gerade nicht im Kino läuft.

(b) Sei $\sigma := \{E, f\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht?

(i) $\forall x\, \exists y\ E(x,y) \quad \equiv \quad \exists y\, \forall x\ E(x,y)$

(ii) $\forall x\, \forall y \Big(f(x) = y \ \rightarrow\ E(y,x) \Big) \quad \equiv \quad \forall y\, \forall x \Big(\neg\, E(y,x) \ \rightarrow\ \neg\, f(x) = y \Big)$

(iii) $\forall x\, \forall y\ \neg\, f(x) = y \quad \equiv \quad \neg \forall x\, \exists y \Big(\Big(x = y \ \vee\ E(x,y) \Big) \ \rightarrow\ \exists z \Big(z = y \ \vee\ E(z,y) \Big) \Big)$

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Geben Sie für die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi(x) \;:=\; \forall y\, \exists z \Big(x{=}y \;\vee\; \big(E(y,x) \;\rightarrow\; E(x,z) \big) \Big)$$

eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, deren Universum aus höchstens 4 Elementen besteht, und Belegungen β_1 und β_2 in $\mathcal{A}$ an, so dass für die σ-Interpretationen $\mathcal{I}_1 := (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 := (\mathcal{A}, \beta_2)$ gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$. (Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ gilt!)

(b) Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathcal{D}$ aus der Vorlesung.

Berechnen Sie die Relationen $[\![\varphi_1(x_{\mathrm{T}})]\!]^{\mathcal{D}}$, $[\![\varphi_2(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{A}})]\!]^{\mathcal{D}}$, $[\![\varphi_3(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{Z}})]\!]^{\mathcal{D}}$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfragen durch die Formeln φ_1, φ_2 und φ_3 beschrieben werden.

(i) $\varphi_1(x_{\mathrm{T}}) \;:=$

$$\Big(\exists x_{\mathrm{Z}}\, R_{Prog}(\text{‘Babylon’}, x_{\mathrm{T}}, x_{\mathrm{Z}}) \;\;\wedge\;\; \neg \exists x_{\mathrm{Z}}\, R_{Prog}(\text{‘Casablanca’}, x_{\mathrm{T}}, x_{\mathrm{Z}}) \Big)$$

(ii) $\varphi_2(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{A}}) \;:=\; \exists x_{\mathrm{S}}\, \exists x_{\mathrm{Tel}}\, \exists x_{\mathrm{Z}} \Big(R_{Kino}(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{S}}, x_{\mathrm{Tel}}) \wedge R_{Prog}(x_{\mathrm{K}}, \text{‘Alien’}, x_{\mathrm{Z}}) \Big)$

(iii) $\varphi_3(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{Z}}) \;:=$

$$\Big(\exists x_{\mathrm{T}}\, R_{Prog}(x_{\mathrm{K}}, x_T, x_Z) \;\wedge\; \forall y_{\mathrm{T}} \forall y_{\mathrm{Z}} \Big(R_{Prog}(x_{\mathrm{K}}, y_T, y_Z) \;\rightarrow\; \neg \exists x_{\mathrm{S}} \exists x_{\mathrm{R}} \Big(R_{Filme}(y_{\mathrm{T}}, x_{\mathrm{R}}, x_{\mathrm{S}}) \wedge (x_{\mathrm{S}}{=}\text{‘George Clooney’} \vee x_{\mathrm{R}}{=}\text{‘George Clooney’}) \Big) \Big) \Big)$$

(c) **(i)** Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Terme (Satz 3.27) per Induktion über den Aufbau von Termen.

(ii) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Satz 3.28) per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 10 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für Aufgabenteil (a) auf einem Zettel an. Die Lösung der Aufgabenteile (b), (c) und (d) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code (in einer Datei für diese drei Aufgabenteile zusammen) in einem extra-Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!*

(a) Gegeben sei das folgende Prolog-Programm:

```
1  a(X, Y) :- b(X, Y).
2  a(1, 1).
3  b(X, X) :- c(X).
4  b(X, Y) :- c(X), !, c(Y).
5  b(X, Y) :- c(X), c(Y).
6  c(2).
7  c(3).
```

Zeichnen Sie einen Suchbaum für die folgende Anfrage: `?- a(X, Y).`

(b) Schreiben Sie in `blatt8.pl` ein Prädikat `not_member/2`, so dass `not_member(X, L)` für einen Term `X` und eine Liste `L` genau dann erfüllt ist, wenn `X` mit *keinem* Element von `L` unifiziert werden kann. Verwenden Sie dabei abgesehen vom Cut und dem in SWI-Prolog vordefinierten Prädikat `fail/0` keine weiteren Prädikate, und insbesondere nicht `\=/2`.

(c) Führen Sie in `blatt8.pl` einen neuen Operator `<=>` für die Biimplikation $\leftrightarrow$ ein, der den gleichen Typ und die gleiche Präzedenz wie der in `al.pl` definierte Operator `=>` hat.

(d) Implementieren Sie in `blatt8.pl`, analog zu Beispiel 2.52 im Vorlesungsskript, Schritt 1 des Tseitin-Verfahrens. D.h., schreiben Sie ein Prädikat `tseitin/2`, so dass die Anfrage `tseitin(F, L)` für eine aussagenlogische Formel `F` eine Liste `L` aussagenlogischer Formeln ausgibt, die die folgenden Eigenschaften hat:

- Die Konjunktion der Formeln in der Liste `L` ist erfüllbarkeitsäquivalent zu `F`.
- Die Liste `L` enthält für jede Teilformel von `F` (abgesehen von Literalen) genau eine Formel.
- In jeder Formel aus `L` kommen höchstens 3 verschiedene Aussagensymbole vor.

Beispielsweise sollte Prolog auf die Anfrage:

```
tseitin((p => ~q) \/ (~ (p /\ q) /\ r), L).
```

wie folgt antworten:

```
L = [x1, x1<=>x2\/x3, x2<=> (p=> ~q), x3<=>x4/\r, x4<=> ~x5, x5<=>p/\q].
```

Hierbei sind die konkrete Wahl der neuen Aussagensymbole sowie die Reihenfolge der Formeln in der Repräsentation der Menge unwesentlich.

Hinweise:

- Benutzen Sie zur Erzeugung neuer Aussagensymbole das in SWI-Prolog eingebaute Prädikat `gensym/2`. Das Prädikat `gensym/2` instantiiert bei dem Aufruf `gensym(x, A)` die Variable `A` mit einem Atom der Form `x`n, wobei eine Zahl n so gewählt wird, dass das Atom `x`n in diesem Lauf von SWI-Prolog noch nicht verwendet wurde.
- Benutzen Sie den in Teilaufgabe (c) definierten Operator `<=>`.
- Nutzen Sie ggf. Cut oder Negation. Führen Sie bei Bedarf Hilfsprädikate ein.