Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

11. November 2022

Logik in der Informatik

Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 4

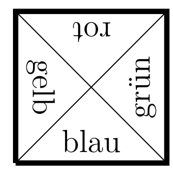
Abgabe: *bis 21. November 2022, 13.⁰⁰ Uhr*

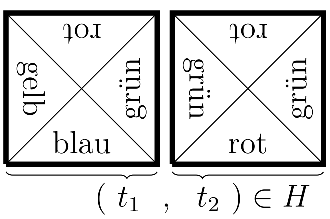
Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 4 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Eine Kachel ist ein Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten (vgl. Beispielabbildung rechts). Alle Kacheln eines Kacheltyps t besitzen dieselbe Färbung ihrer Kanten. Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Seien H und V zwei Relationen auf K, die für zwei Kacheltypen t_1, t_2 besagen, dass t_1 und t_2 in dieser Reihenfolge horizontal bzw. vertikal zueinander passen, also die sich berührenden Kanten von derselben Farbe sind.





D.h. für $t_1, t_2 \in K$ gilt:

$(t_1, t_2) \in H$ genau dann, wenn t_2 rechts neben t_1 passt

und analog

$(t_1, t_2) \in V$ genau dann, wenn t_2 über t_1 passt.

Eine (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene (für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist eine Funktion $k : \{1, \dots, n\}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Eine (K, H, V)-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene ist eine Funktion $k : \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Benutzen Sie für die Lösung der Aufgabe Aussagensymbole der Form $A_{i,j}^t$ für $t \in K, i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Bedeutung, dass Feld (i,j) mit einer Kachel vom Typ t gekachelt wird.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie eine endliche Menge Γ_n von aussagenlogischen Formeln, so dass gilt:

> Jedes Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n entspricht einer (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene und jede (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene entspricht einem Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n.

Begründen Sie die Wahl Ihrer Formelmenge Γ_n.

(b) Zeigen Sie das folgende Theorem:

> Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen und seien H und V zwei 2-stellige Relationen auf K (d.h. $H, V \subseteq K \times K$). Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene gibt, dann gibt es auch eine (K, H, V)-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei φ_n die in Satz 2.45 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

(i) Bestimmen Sie alle Interpretationen $\mathcal{I}$, für die gilt:

- $\mathcal{I}$ erfüllt φ_n und
- für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert eine Interpretation, die sich von $\mathcal{I}$ nur dadurch unterscheidet, dass sie *genau* eines der beiden Aussagensymbole X_i, Y_i auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als $\mathcal{I}$, und die φ_n *nicht* erfüllt.

(ii) Beweisen Sie Satz 2.45 der Vorlesung.
Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil **(i)**, dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$ von mindestens zwei essentiell verschiedenen Interpretationen $\mathcal{I}$ aus **(i)** erfüllt wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(iii) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ'_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ'_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.52 die Formel

$$\varphi \;:=\; \Big(\big((P \vee \neg Q) \wedge S \big) \rightarrow \neg(\neg Q \vee R) \Big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.
Achtung: Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.52. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln von φ erhalten aufsteigend Bezeichner der Form ψ_i, wobei $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (φ erhält keinen zusätzlichen Bezeichner).
- Negierte Aussagensymbole und φ bilden hier keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Der Index i entspricht der Position der Subformeln in der Traversierung des Syntaxbaumes von φ nach der pre-order Tiefensuche. Eine solche Traversierung listet zunächst die Wurzel des Baumes auf, dann die Traversierung des kompletten linken Teilbaumes (so dieser existiert) und dann die des rechten Teilbaumes (so dieser existiert).
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht oder nur teilweise korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 4 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für die Aufgabenteile (a) und (b) handschriftlich an (also wie Aufgabe 3) und reichen Sie diese bei Moodle ein. Die Lösung des Aufgabenteils (c) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise (siehe `https://hu.berlin/proLog2223`) für Prolog-Code in einem zusätzlichen Abgabefach in Moodle eingereicht werden!*

(a) Wie antwortet Prolog auf die folgenden Anfragen?

- **(i)** `?- [a, X, a] = [Y, b, Y].`
- **(ii)** `?- [Y, c] = [c, Y | []].`
- **(iii)** `?- [H | T ] = [a ,b | [c | [d]]].`
- **(iv)** `?- [a | [b | T]] = [X, H | [c | [d]]].`

(b) Das Prädikat `member/2` wird in Abschnitt 4.2 des Buchs “Learn Prolog Now!” definiert. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- member(a, [a, b, X]).
```

(c) Definieren Sie *rekursiv* ein Prädikat `nimm/3`, so dass `nimm(E, X, Y)` genau dann erfolgreich ist, wenn `E` ein Element der Liste `X` ist und `Y` aus der Liste `X` durch Löschung eines Vorkommens von `E` entsteht. So sollte beispielsweise die Anfrage

```
?- nimm(E, [1, 2, 3], Y).
```

zu der folgenden Antworten führen:

```
E = 1,
Y = [2, 3] ;
E = 2,
Y = [1, 3] ;
E = 3,
Y = [1, 2] ;
false.
```