

Logik in der Informatik

Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt 2

Abgabe: bis 7. November 2022, 13.00 Uhr

Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 2 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

Die neugewählte Regierung von *Quadratien* muss die Energieerzeugung des Landes auf den neusten Stand bringen. Dazu haben sie eine 30 mal 30 Einheiten große Fläche zur Verfügung. Alle Einheiten sind quadratisch und gleich groß, wodurch die Einheit $\langle i, j \rangle$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 30\}$ benachbart ist zu den Einheiten $\langle i - 1, j \rangle$, $\langle i + 1, j \rangle$, $\langle i, j - 1 \rangle$ und $\langle i, j + 1 \rangle$. Hierbei haben Einheiten am Rand der Fläche natürlich weniger als vier Nachbarn. Jede Einheit kann für höchstens eine der Energiegewinnungsverfahren *Fusionsenergie*, *Hydrokraft*, *Solarenergie* oder *Windkraft* verwendet werden.

Um den Flächennutzungsplan zu erstellen, benutzt die Regierung die Aussagensymbole $F_{i,j}$, $H_{i,j}$, $S_{i,j}$ und $W_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 30\}$. Hierbei repräsentiert z. B. $S_{13,9}$ die Aussage „Einheit $\langle 13, 9 \rangle$ wird für Solarenergie genutzt“. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

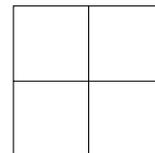
Nun muss die Regierung bei der Flächennutzungsplanung einige Auflagen einhalten.

- (a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass für jede Einheit tatsächlich nur eine Energiegewinnungsverfahren eingeplant ist.
- (b) Sei

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i,j \in \{2, \dots, 29\}} ((W_{i,j} \vee H_{i,j}) \rightarrow (\neg W_{i-1,j} \wedge \neg W_{i+1,j} \wedge \neg W_{i,j-1} \wedge \neg W_{i,j+1})) .$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

- (c) Fusionsenergie benötigt viel Wasser. Deswegen sollen Einheiten, die für Fusionsenergie vorgesehen sind, am Rand liegen oder mit einer Einheit, die für Hydrokraft vorgesehen ist, benachbart sein. Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die diese Auflage repräsentiert.
- (d) Es soll mindestens einen 2x2-Cluster mit Solarenergie geben, also vier Solar-Einheiten, die wie in der nebenstehenden Abbildung angeordnet sind. Geben Sie eine Formel φ_4 an, die diese Auflage repräsentiert.



Aufgabe 3:**(40 Punkte)**

- (a) Beweisen Sie, dass für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \text{AL}$ und alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ gilt:

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Phi \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

- (b) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Zweierpotenz*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 2^m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{2 \cdot n}), & \text{falls } n \text{ eine Zweierpotenz ist} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{2n}), & \text{falls } n \text{ keine Zweierpotenz ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow \neg A_1)$, $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_2)$, $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_6)$, $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_8)$ und $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{10})$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und beweisen Sie, dass $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

- (c) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \equiv \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4:**(20 Punkte)**

Arbeiten Sie Kapitel 2 des Buchs “Learn Prolog Now!” durch.

- (a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

- (i) `orks` und `uruk-hai`
- (ii) `koenig(X)` und `koenig(boromir)`
- (iii) `Balrog` und `'Balrog'`
- (iv) `kankra` und `'kankra'`
- (v) `bruder(faramir, Y)` und `bruder(X, boromir)`
- (vi) `hobbit(sam, X, Y)` und `hobbit(X, Y, merry)`
- (vii) `gefährten(ringträger(frodo), X)` und `gefährten(ringträger(Y), freunde(sam, Y))`

- (b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe 4(b) von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

`?- ringgemeinschaft(Y).`