Kapitel 4

Kombinatorik

Folie 233

Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, bei dem die Anordnungsmöglichkeiten einer endlichen Menge vorgegebener Objekte studiert werden. Oft geht es darum, zu zählen, wie viele verschiedene Anordnungsmöglichkeiten oder wie viele verschiedene Objekte mit bestimmten Eigenschaften es gibt. Resultate und Methoden der Kombinatorik werden im Fach Informatik oft beim Entwurf und der Analyse von effizienten Algorithmen verwendet,

4.1 Kombinatorische Abzählregeln

Folie 234

Zunächst fassen wir einige grundlegende Abzähl-Regeln zusammen:

Regel 4.1.

(a) *Gleichheitsregel*:

Für endliche Mengen A, B gilt:
$|A| = |B| \iff$ es gibt eine bijektive Abbildung von A nach B.

(b) *Summenregel*:

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und seien $A_1, \ldots, A_k$ paarweise disjunkte endliche Mengen.
Dann gilt: $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$.

(c) *Zerlegungsregel*:

Seien A, B endliche Mengen und sei f eine Abbildung von A nach B.
Für jedes $b \in B$ sei[1] $f^{-1}(b) := \{a \in A \ : \ f(a) = b\}$. Es gilt:

[1]Die Menge $f^{-1}(b)$ wird das *Urbild von b unter f* genannt.

$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$.

(d) *Produktregel*:

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und seien $A_1, \ldots, A_k$ endliche Mengen. Dann gilt:

$|A_1 \times \cdots \times A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$.

Beweis. (a) gilt gemäß Beobachtung 2.37 (b).
(b) ist für $k = 1$ und $k = 2$ offensichtlich. Dies können wir als Induktionsanfang nutzen und erhalten dann ganz leicht auch den Induktionsschritt "$k \to k{+}1$".
(c) folgt aus (b), denn: Sei $k := |B|$ und seien $b_1, \ldots, b_k$ so dass $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Für jedes $i \in [k]$ sei $A_i := f^{-1}(b_i)$. Da f eine Abbildung ist, sieht man leicht, dass die Mengen $A_1, \ldots, A_k$ paarweise disjunkt sind und dass gilt: $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Unter Verwendung von (b) erhalten wir: $|A| = |\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| = \sum_{i=1}^{k} |f^{-1}(b_i)|$.
(d) gilt gemäß Satz 2.21 (b). □

4.2 Ziehen von Elementen aus einer Menge

Folie 235

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Objekte aus einer n-elementigen Menge zu ziehen?
Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, wie denn genau gezogen wird. Wir unterscheiden zwischen

Ziehen mit Zurücklegen: nachdem ein Element gezogen wurde, wird es in den "Lostopf" zurückgelegt, so dass es bei späteren Zügen nochmals gezogen werden kann

Ziehen ohne Zurücklegen: nachdem ein Element gezogen wurde, ist es im "Lostopf" nicht mehr verfügbar und kann in späteren Zügen daher nicht nochmals gezogen werden.

Und bei jeder dieser beiden Arten des Ziehens unterscheiden wir zwischen den beiden folgenden Varianten:

mit Berücksichtigung der Reihenfolge: beim Ergebnis wird die Reihenfolge berücksichtigt, in der die einzelnen Elemente gezogen wurden

ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: beim Ergebnis kommt es nur darauf an, welche Elemente insgesamt gezogen wurden — aber die genaue Reihenfolge, in der diese Elemente gezogen wurden, ist egal.

Folie 236

Beispiele 4.2.

(a) Beim Ziehen der Lottozahlen handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

(b) Wenn der Lostopf aus den Elementen $1, 2, 3$ besteht und wir $k := 2$ Elemente ziehen, dann sind folgende Ergebnisse möglich:

	mit Berücksichtigung der Reihenfolge	ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
mit Zurücklegen	$(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$	zwei mal die 1; die 1 und die 2; die 1 und die 3; zwei mal die 2; die 2 und die 3; zwei mal die 3
ohne Zurücklegen	$(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$	$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$

Jede der 4 Varianten schauen wir uns im Folgenden etwas genauer an.

Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Folie 237

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge der Züge berücksichtigt wird und nach jedem Zug das gezogene Element wieder in den "Lostopf" zurückgelegt wird?

Antwort:
Im ersten Zug gibt es n Möglichkeiten, da jedes der n Elemente, die sich im Lostopf befinden, gezogen werden können.
In jedem weiteren Zug gibt es wieder n Möglichkeiten, da sich ja bei jedem Zug weiterhin n Elemente im Lostopf befinden.

Die Menge der möglichen Endergebnisse ist genau die Menge aller k-Tupel, die über den n sich im Lostopf befindlichen Elemente gebildet werden können. Es gibt also beim *Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge* insgesamt

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ mal}} \quad = \quad n^k$$

Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen.

Ziehen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Folie 238

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge der Züge berücksichtigt wird, und nach jedem Zug das gezogene Element dauerhaft aus dem "Lostopf" entfernt ist?

Antwort:
Im ersten Zug gibt es n Möglichkeiten, da jedes der n Elemente, die sich im Lostopf befinden, gezogen werden können.
Danach sind nur noch $n{-}1$ Elemente im Lostopf. Im zweiten Zug gibt es also nur noch $n{-}1$ Möglichkeiten, da nun jedes der $n{-}1$ Elemente des Lostopfs gezogen werden könnte.
Für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, k{-}1\}$ gilt: Vor dem $(i{+}1)$-ten Zug befinden sich genau $n{-}i$ Elemente im Lostopf; und im $(i{+}1)$-ten Zug kann jedes dieser $n{-}i$ Elemente gezogen werden.
Es gibt also beim *Ziehen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge* insgesamt

$$(n)_k \quad := \quad n \cdot (n{-}1) \cdots (n{-}k{+}1) \quad = \quad \frac{n!}{(n{-}k)!} \tag{4.1}$$

Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen.

Folie 239

Wenn der Lostopf zu Beginn aus den Elementen der Menge $M := \{1, \ldots, n\}$ besteht, gilt: Die Menge der möglichen Endergebnisse beim *Ziehen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtung der Reihenfolge* ist genau die Menge

$$\big\{\, (a_1, \ldots, a_k) \in M^k \;:\; a_1, \ldots, a_k \;\text{ sind paarweise verschieden}\, \big\}\;.$$

Wir haben eben gerade ausgerechnet, dass Folgendes gilt:

$$\Big|\big\{(a_1, \ldots, a_k) \in [n]^k \;:\; a_1, \ldots, a_k \;\text{ paarw. versch.}\big\}\Big| \;=\; (n)_k \tag{4.2}$$

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Folie 240

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, und zwar "ohne zurückzulegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge"?

Antwort:
Dies entspricht gerade dem Szenario, in dem wir nur einmal in den Lostopf greifen und dabei auf einen Schlag k Elemente herausholen und uns als Ergebnis die Menge dieser k paarweise verschiedenen Elemente anschauen. Die Menge der möglichen Endergebnisse beim *Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtung der Reihenfolge* von k Elementen aus einer n-elementigen Menge M ist also genau die Menge

$$\mathcal{P}_k(M) \quad := \quad \{X \subseteq M \;:\; |X| = k\}\,, \tag{4.3}$$

d.h. die *Menge aller k-elementigen Teilmengen von M*.

Folie 241

Binomialkoeffizienten

Definition 4.3. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir:[2]

$$\binom{n}{k} \quad := \quad |\,\mathcal{P}_k([n])\,|\ . \tag{4.4}$$

$\binom{n}{k}$ (in Worten: „n über k“) wird *Binomialkoeffizient (zu n und k)* genannt; er ist definiert als die Anzahl der verschiedenen k-elementigen Teilmengen, die eine n-elementige Menge besitzt.

Beobachtung 4.4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

denn: $[n]$ besitzt genau eine 0-elementige Teilmenge (nämlich $\emptyset$) und genau eine 1-elementige Teilmenge (nämlich $[n]$).

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$ gilt: $\binom{n}{k} = 0$

denn: Wegen $k > n$ gibt es keine einzige k-elementige Teilmenge von $[n]$. Also ist $\mathcal{P}_k([n]) = \emptyset$.

[2] Zur Erinnerung: $[n] = \{i \in \mathbb{N} \;:\; 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

(c) $2^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

denn: $\mathcal{P}([n]) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([n])$, und f.a. $k, k' \in \mathbb{N}$ mit $k, k' \leqslant n$ und $k \neq k'$ gilt: $\mathcal{P}_k([n]) \cap \mathcal{P}_{k'}([n]) = \emptyset$. Aus der Summenregel (Regel 4.1(b)) und Folgerung 2.39 folgt also:

$$2^n \;=\; |\mathcal{P}([n])| \;=\; \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k([n])| \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \,.$$

Folie 242

Pascal'scher Rekurrenzsatz

Satz 4.5. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt:*

$$\binom{n+1}{k} \;=\; \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \,.$$

Beweis. Sei $M := [n+1]$. Wir zerlegen die Menge $\mathcal{P}_k(M)$ aller k-elementigen Teilmengen von M wie folgt:

- A sei die Menge aller k-elementigen Teilmengen von M, die die Zahl $n+1$ enthalten.
- B sei die Menge aller k-elementigen Teilmengen von M, die die Zahl $n+1$ nicht enthalten.

  Offensichtlicherweise ist $B = \mathcal{P}_k([n])$. Also ist $|B| = \binom{n}{k}$.

Es gilt: A und B sind disjunkt, und $\mathcal{P}_k(M) = A \cup B$. Somit gilt gemäß der Summenregel (Regel 4.1(b)):

$$\binom{n+1}{k} \;=\; |\mathcal{P}_k(M)| \;=\; |A| + |B| \;=\; |A| + \binom{n}{k} \,.$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass $|A| = \binom{n}{k-1}$ ist.
Dazu betrachten wir die Abbildung $f : \mathcal{P}_{k-1}([n]) \to A$ mit $f(X) := X \cup \{n+1\}$ f.a. $X \in \mathcal{P}_{k-1}([n])$. Man sieht leicht, dass f bijektiv ist. Aus der Gleichheitsregel (Regel 4.1(a)) folgt daher:

$$|A| \;=\; |\mathcal{P}_{k-1}([n])| \;=\; \binom{n}{k-1} \,.$$

□

Folie 243

Pascal'sches Dreieck

Aus dem Pascal'schen Rekurrenzsatz ergibt sich ein sehr effizienter Algorithmus, mit dem man bei Eingabe von n und k den Wert $\binom{n}{k}$ berechnen kann:
Wir bilden eine Tabelle, deren Zeilen wir mit den Zahlen $0, 1, \ldots n$ durchnummerieren; in Zeile i benutzen wir die Spalten $0, 1, \ldots, i$.
Ziel ist, in Zeile i und Spalte j den Wert $\binom{i}{j}$ einzutragen. Wir wissen, dass $\binom{i}{0} = \binom{i}{i} = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Somit können wir diese Einträge direkt in die Tabelle einfügen. Für die restlichen Einträge gehen wir die Zeilen in aufsteigender Reihenfolge durch. Den Eintrag $\binom{i+1}{j}$ in Zeile $i{+}1$ und Spalte j, für $1 \leqslant j \leqslant i$ erhalten wir gemäß dem Pascal'schen Rekurrenzsatz einfach als die Summe $\binom{i}{j-1} + \binom{i}{j}$ der Einträge in den Spalten $j{-}1$ und j der Zeile i. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle (die fettgedruckten Einsen sind diejenigen Einträge, mit denen wir starten; danach gehen wir die einzelnen Zeilen nacheinander durch):

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	**1**							
1	**1**	**1**						
2	**1**	2	**1**					
3	**1**	3	3	**1**				
4	**1**	4	6	4	**1**			
5	**1**	5	10	10	5	**1**		
6	**1**	6	15	20	15	6	**1**	
7	**1**	7	21	35	35	21	7	**1**

Die hier genutzte algorithmische Technik des Ausfüllens einer Tabelle, bei der man zum Berechnen des Eintrags in Zeile i und Spalte j auf Dinge zurückgreift, die man bereits vorher in die Tabelle eingetragen hat (hier: die Einträge in Zeile $i{-}1$ und den Spalten j und $j{-}1$), wird *dynamische Programmierung* genannt.

Folie 244

Binomische Formel

Satz 4.6. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \; .$$

Beweis. Es gilt:

$$(a+b)^n \quad = \quad \underbrace{(a+b)\cdot \;\cdots\; \cdot(a+b)}_{n \text{ mal}} \;. \tag{4.5}$$

Wir multiplizieren dieses n-fache Produkt aus und gruppieren die einzelnen Summanden nach dem Term $a^k \cdot b^{n-k}$, für jedes $k \in \{0,\dots,n\}$. Jedes einzelne $X \subseteq [n]$ repräsentiert wie folgt einen Summanden, den wir beim Ausmultiplizieren von (4.5) erhalten: für jede Position $i \in [n]$ wählen wir im i-ten Exemplar des Faktors $(a+b)$ beim Ausmultiplizieren von (4.5) den Wert a falls $i \in X$ bzw. den Wert b falls $i \notin X$ ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n \quad &= \quad \sum_{X\subseteq[n]} a^{|X|}\cdot b^{n-|X|} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n} \bigl|\{X \subseteq [n] \ : \ |X| = k\}\bigr| \cdot a^k \cdot b^{n-k} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k([n])| \cdot a^k \cdot b^{n-k} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \;.
\end{aligned}$$

□

Folie 245

Eine Formel zum Ausrechnen des Binomialkoeffizienten

Satz 4.7. *Für alle $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$ gilt:*

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{(n)_k}{k!} \quad = \quad \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Beweis. Sei $A := \{(a_1,\dots,a_k) \in [n]^k \ : \ a_1,\dots,a_k \text{ paarweise verschieden}\}$. Aus (4.1) und (4.2) wissen wir, dass Folgendes gilt:

$$|A| \quad = \quad (n)_k \quad = \quad \tfrac{n!}{(n-k)!}$$

Sei B die Menge aller *bijektiven* Abbildungen $f : [k] \to [k]$. Man kann sich leicht davon überzeugen (Details: Übungsaufgabe), dass $|B| = k!$ ist.

Betrachte ein beliebiges $X \in \mathcal{P}_k([n])$ und liste die Elemente $x_1, \ldots, x_k$ von X in aufsteigender Reihenfolge auf; für jedes $f \in B$ betrachte das Tupel $t_{X,f} := (x_{f(1)}, \ldots, x_{f(k)})$.
Sei die Abbildung $h : \mathcal{P}_k([n]) \times B \to A$ definiert durch $h(X, f) := t_{X,f}$ für alle $X \in \mathcal{P}_k([n])$ und alle $f \in B$. Man kann sich leicht davon überzeugen (Details: Übungsaufgabe), dass h *bijektiv* ist.
Aus der Gleichheitsregel (Regel 4.1(a)) folgt daher: $|\mathcal{P}_k([n]) \times B| = |A|$.
Unter Verwendung der Produktregel (Regel 4.1(d)) folgt:

$$(n)_k \quad = \quad |A| \quad = \quad |\mathcal{P}_k([n])| \cdot |B| \quad = \quad \binom{n}{k} \cdot k!$$

Insgesamt erhalten wir: $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. □

Folie 246

Weitere Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Satz 4.8. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$ gilt:*

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) Falls $k \neq 0$, so $\binom{n}{k} \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k$.

(c) Falls $k \neq 0$, so $\binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$ *wobei e die Eulersche Zahl ist.*[3]

Beweis. (a) folgt direkt aus Satz 4.7.

(b): Gemäß Satz 4.7 gilt:

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{(n)_k}{k!} \quad = \quad \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdots \frac{n-(k-1)}{1} \tag{4.6}$$

Außerdem gilt für alle $i \in \{1, \ldots, k{-}1\}$

$$\frac{n-i}{k-i} \quad \geqslant \quad \frac{n}{k}\,, \tag{4.7}$$

denn: $k \leqslant n$, also $ki \leqslant ni$, also $nk - ki \geqslant nk - ni$, also $k(n{-}i) \geqslant n(k{-}i)$, also $\frac{n-i}{k-i} \geqslant \frac{n}{k}$.

[3] $e = 2,71828\cdots$

Aus (4.6) und (4.7) folgt:

$$\binom{n}{k} \quad \geqslant \quad \underbrace{\frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdots \frac{n}{k}}_{k \text{ mal}} \quad = \quad \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

(c): Wir nutzen den folgenden Sachverhalt, den wir hier nicht beweisen (der aber durch Aufmalen der Funktionsgraphen der Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ und der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1 + x$ leicht eingesehen werden kann):

$$\text{Für jede Zahl } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0 \text{ gilt: } \ 1 + x < e^x. \tag{4.8}$$

Wenn $1+x \geqslant 0$ ist, folgt aus (4.8) auch für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, dass $(1 + x)^n < (e^x)^n = e^{x \cdot n}$. Wir wählen $x := \frac{k}{n}$ und erhalten:

$$e^k \quad = \quad e^{x \cdot n} \quad > \quad (1 + x)^n$$

Die binomische Formel liefert:

$$(1 + x)^n \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} \cdot x^j \quad \geqslant \quad \tbinom{n}{k} \cdot x^k$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$e^k \quad > \quad \tbinom{n}{k} \cdot \left(\tfrac{k}{n}\right)^k$$

Also ist

$$\tbinom{n}{k} \quad < \quad \left(\tfrac{en}{k}\right)^k .$$

$\square$

Ziehen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Folie 247

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei nach jedem Zug das gezogene Element wieder in den "Lostopf" zurückgelegt wird, aber beim Endergebnis die Reihenfolge der gezogenen Elemente nicht berücksichtigt wird?

Antwort:
Wenn der Lostopf aus den Elementen der Menge $M := [n]$ besteht, entspricht die Menge der möglichen Endergebnisse gerade der Menge aller

k-elementigen Multimengen über M, also aller Abbildungen $f : M \to \mathbb{N}$, für die gilt: $\sum_{x \in M} f(x) = k$.

Um zu zählen, wie viele solche Multimengen es gibt, nutzen wir den folgenden Trick: Wir repräsentieren eine k-elementige Multimenge $f : M \to \mathbb{N}$ durch das wie folgt definierte Wort w_f über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$:

$$w_f \quad := \quad a^{f(1)}\, b\, a^{f(2)}\, b\, \cdots\, b\, a^{f(n)}$$

Beispielsweise gilt für $n := 5$ und $k := 3$, dass das Wort $aabbbab$ die Multimenge f mit $f(1) = 2$, $f(2) = f(3) = 0$, $f(4) = 1$ und $f(5) = 0$ repräsentiert.

Folie 248

Beachte: Für jede k-elementige Multimenge f über $[n]$ hat das Wort w_f die Länge $k+n-1$ und enthält genau $(n-1)$-mal den Buchstaben b. Und die Abbildung h, die jeder k-elementigen Multimenge f das Wort w_f zuordnet, ist eine Bijektion von der Menge der k-elementigen Multimengen von $[n]$ auf die Menge[4]

$$X \quad := \quad \{\ w \in \{a, b\}^* \ : \ |w| = k+n-1 \ \text{ und } \ |w|_b = n-1\ \}.$$

Nun ist $|X|$ genau die Anzahl der Möglichkeiten, aus der $(k+n-1)$-elementigen Menge aller Positionen des Wortes w diejenigen $n-1$ Positionen auszuwählen, an denen der Buchstabe b stehen soll. Also ist

$$|X| \quad = \quad \binom{k+n-1}{n-1}$$

Es gibt also beim *Ziehen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge* insgesamt

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen. Gemäß Satz 4.8(a) gilt: $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{n+k-1}{k}$.

4.3 Das Prinzip der Inklusion und Exklusion

Folie 249

Die Summenregel (Regel 4.1(b)) besagt, dass die Kardinalität der Vereinigung von paarweise disjunkten endlichen Mengen $A_1, \ldots, A_k$ genau die Summe der Kardinalitäten der Mengen $A_1, \ldots, A_k$ ist.

[4] $|w|_b$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens b im Wort w

Aber wie können wir $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|$ bestimmen, wenn die Mengen $A_1, \dots, A_k$ *nicht* paarweise disjunkt sind?
Für $k = 2$ ist die Lösung ganz leicht:

$$|A_1 \cup A_2| \quad = \quad |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|\,.$$

Das *Prinzip der Inklusion und Exklusion* (auch *Siebformel* genannt) verallgemeinert dies auf beliebige $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$:

Satz 4.9 (Prinzip der Inklusion und Exklusion; Siebformel)**.**
Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und seien $A_1, \dots, A_k$ beliebige endliche Mengen. Dann gilt:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| \quad = \quad \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [k]} (-1)^{|I|+1} \cdot |\bigcap_{i \in I} A_i|\,. \tag{4.9}$$

Beweis. Eine Möglichkeit, dies zu beweisen ist, per Induktion nach k vorzugehen. Details: Übungsaufgabe.

Wir geben hier einen anderen, rein kombinatorischen Beweis an: Wir zeigen für jedes beliebige $a \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, dass a sowohl auf der linken Seite von (4.9) als auch auf der rechten Seite von (4.9) genau einmal gezählt wird. Daraus folgt dann direkt, dass die Gleichung (4.9) korrekt ist.

Wir nutzen dabei folgende Notation: Für jedes $I \subseteq [k]$ mit $I \neq \emptyset$ sei $A_I := \bigcap_{i \in I} A_i$.

Für den Rest des Beweises halten wir ein $a \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ fest und setzen $J := \{j \in [k] \;:\; a \in A_j\}$. Offensichtlicherweise gilt f.a. $I \subseteq [k]$ mit $I \neq \emptyset$:

$$a \in A_I \quad \iff \quad I \subseteq J$$

(denn: $a \in A_I \iff a \in A_i$ f.a. $i \in I \iff i \in J$ f.a. $i \in I \iff I \subseteq J$).

Offensichtlicherweise wird a auf der linken Seite von (4.9) genau einmal gezählt.

Wie oft wird a auf der rechten Seite von (4.9) gezählt?
Antwort: a schlägt bei genau denjenigen I mit $\emptyset \neq I \subseteq [k]$ zu Buche, für die $I \subseteq J$ gilt; und zwar für jedes solche I mit dem Wert $(-1)^{|I|+1}$. D.h.: Auf der rechten Seite von (4.9) wird a mit dem Wert

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq J} (-1)^{|I|+1}$$

gezählt. Im Folgenden werden wir zeigen, dass diese Summe genau den Wert 1 ergibt. Dazu gruppieren wir die einzelnen Mengen I nach ihrer Mächtigkeit ℓ für jedes $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ für $n := |J|$.
Wir wissen bereits, dass für jedes $\ell \in [n]$ gilt:

$$|\{I \subseteq J \ : \ |I| = \ell\}| \quad = \quad \binom{n}{\ell} \ .$$

Somit gilt:

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq J} (-1)^{|I|+1} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \cdot |\{I \subseteq J \ : \ |I| = \ell\}| \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \cdot \binom{n}{\ell} \ .$$

Wir nutzen die Binomische Formel für $(a+b)^n$ für $a := -1$ und $b := 1$, um diese Summe auszurechnen:

$$0 \quad = \quad (a+b)^n \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^\ell 1^{n-\ell} \quad = \quad \binom{n}{0} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^\ell \ .$$

Wir bringen $\binom{n}{0} = 1$ auf die linke Seite und erhalten dadurch:

$$-1 \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^\ell \ .$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit (-1) und erhalten:

$$1 \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^{\ell+1} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \cdot \binom{n}{\ell} \ .$$

Insgesamt erhalten wir, dass a auf der rechten Seite von (4.9) mit dem Wert

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq J} (-1)^{|I|+1} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \cdot \binom{n}{\ell} \quad = \quad 1$$

gezählt wird. Dies beendet den Beweis von Satz 4.9. □

Folie 250

Ein Anwendungsbeispiel der Siebformel

Beispiel 4.10. Wie viele Zahlen in der Menge $\{1, \ldots, 100\}$ gibt es, die ganzzahlig durch 2, 3 oder 5 teilbar sind?

Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei

$$V_k \quad := \quad \{\, i{\cdot}k \ : \ i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \text{ und } i{\cdot}k \leqslant 100 \,\}$$

die Menge aller Vielfachen von k, die $\leqslant 100$ sind.
Die Antwort auf die obige Frage ist die Zahl $|V_2 \cup V_3 \cup V_5|$. Die Summenregel (Regel 4.1(b)) können wir nicht anwenden, da die Mengen nicht paarweise disjunkt sind. Aber wir können die Siebformel anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} & |V_2 \cup V_3 \cup V_5| \\ = \quad & |V_2| + |V_3| + |V_5| - |V_2 \cap V_3| - |V_2 \cap V_5| - |V_3 \cap V_5| + |V_2 \cap V_3 \cap V_5|. \end{aligned}$$

Es gilt: $|V_k| = \lfloor \frac{100}{k} \rfloor$, also die größte natürliche Zahl j mit $j \leqslant \frac{100}{k}$.
Somit ist $|V_2| = 50$, $|V_3| = 33$, $|V_5| = 20$.
Und $V_2 \cap V_3 = V_6$, also $|V_2 \cap V_3| = |V_6| = \lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16$.
Analog ist $V_2 \cap V_5 = V_{10}$, also $|V_2 \cap V_5| = |V_{10}| = 10$;
und $V_3 \cap V_5 = V_{15}$, also $|V_3 \cap V_5| = |V_15| = \lfloor \frac{100}{15} \rfloor = 6$;
und $V_2 \cap V_3 \cap V_5 = V_{30}$, also $|V_2 \cap V_3 \cap V_5| = \lfloor \frac{100}{30} \rfloor = 3$.

Insgesamt erhalten wir:

$$|V_2 \cup V_3 \cup V_5| \quad = \quad 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 \quad = \quad 74\,.$$

4.4 Prinzip des doppelten Abzählens

Folie 251

Bereits in einigen vorherigen Beweisen haben wir den folgenden, offensichtlichen Sachverhalt genutzt: Wenn wir eine endliche Liste von Zahlen gegeben haben und diese Zahlen aufsummieren wollen, ist egal in welcher genauen Reihenfolge wir die Zahlen addieren — es wird immer das gleiche Ergebnis herauskommen. Dies wird auch *Prinzip des doppelten Abzählens* genannt.

Regel 4.11 (Prinzip des doppelten Abzählens)**.**
Seien $n, m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Es sei eine Tabelle gegeben, deren Zeilen mit $1, \ldots, n$ und deren Spalten mit $1, \ldots, m$ durchnummeriert sind. Für jedes $i \in [n]$ und $j \in [n]$ ist eine Zahl $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ gegeben, die in der Tabelle in Zeile i und Spalte j eingetragen ist. Für jedes $i \in [n]$ sei z_i die Summe aller Einträge in Zeile i, d.h. $z_i := \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$. Für jedes $j \in [m]$ sei s_j die Summe aller Einträge in Spalte j, d.h. $s_j := \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} s_j \quad = \quad \sum_{(i,j) \in [n] \times [m]} a_{i,j}\,.$$

Beweis. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \quad = \quad \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} a_{i,j} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i.j} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} s_j \ .$$

□

Folie 252

Ein typisches Anwendungsbeispiel des Prinzips des doppelten Abzählens ist der folgende Satz von Euler (1736).

Satz 4.12. *Für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt:*

$$\sum_{v\in V} \text{Grad}_G(v) \quad = \quad 2 \cdot |E| \ .$$

D.h.: Die Summe der Grade aller Knoten von G ist genau 2 mal die Anzahl der Kanten von G.

Beweis. Wir nutzen das Prinzip des doppelten Abzählens (Regel 4.11) für $n := |V|$ und $m := |E|$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auflistung aller Knoten von G und sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Auflistung aller Kanten von G.
In die Tabelle A tragen wir in Zeile i und Spalte j den Eintrag

$$a_{i,j} \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{falls Knoten } v_i \text{ ein Endpunkt der Kante } e_j \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein (für alle $i \in [n]$ und $j \in [m]$).
Für jedes $i \in [n]$ gilt dann: In Zeile i der Tabelle A stehen genau so viele Einsen wie es Kanten in G gibt, die den Knoten v_i als Endpunkt haben. Somit gilt für $z_i := \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, dass $z_i = \text{Grad}_G(v_i)$ ist.
Daraus folgt, dass $\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{v\in V} \text{Grad}_G(v)$ die Summe der Grade aller Knoten von G ist.
Für jedes $j \in [m]$ gilt: In Spalte j der Tabelle A stehen genau 2 Einsen, nämlich in den beiden Zeilen, die den beiden Endpunkten der Kante e_j entsprechen. D.h. für jedes $j \in [m]$ gilt für $s_j := \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$, dass $s_j = 2$ ist.
Somit ist $\sum_{j=1}^{m} s_j = 2{\cdot}m = 2 \cdot |E|$.
Insgesamt erhalten wir:

$$2 \cdot |E| \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} s_j \quad \overset{\text{Regel 4.11}}{=} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i \quad = \quad \sum_{v\in V} \text{Grad}_G(v) \ .$$

□

Folie 253

Folgerung 4.13. *Für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt: Die Anzahl aller Knoten von G, deren Grad ungerade ist, ist gerade.*

Beweis. Durch Widerspruch. Angenommen, die Anzahl der Knoten von ungeradem Grad ist ungerade. Dann ist $\sum_{v \in V} \text{Grad}_G(v)$ ungerade. Aber Satz 4.12 besagt, dass $\sum_{v \in V} \text{Grad}_G(v) = 2 \cdot |E|$, also gerade ist. Widerspruch! □

Die Aussage von Folgerung 4.13 ist auch als *Handshaking Lemma* bekannt: Auf jeder Feier ist die Anzahl der Personen, die einer ungeraden Anzahl von Gästen zur Begrüßung die Hand schütteln, gerade.[5]

Folie 254

Wir betrachten ein weiteres Beispiel der Anwendung des Prinzips des doppelten Abzählens:

Beispiel 4.14. Sei X eine endliche Menge, sei $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und seien $M_1, \ldots, M_m \subseteq X$. Für jedes $x \in X$ sei $\mathit{Anz}(x) := |\{j \in [m] \ : \ x \in M_j\}|$, d.h. $\mathit{Anz}(x)$ gibt an, in wie vielen der Mengen $M_1, \ldots, M_m$ das Element x enthalten ist.

$$\textit{Behauptung:} \quad \sum_{x \in X} \mathit{Anz}(x) \;=\; \sum_{j \in [m]} |M_j|.$$

Beweis. Sei $n := |X|$ und sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Auflistung aller Elemente von X. Wir nutzen das Prinzip des doppelten Abzählens (Regel 4.11).
In die Tabelle A tragen wir in Zeile i und Spalte j den Eintrag

$$a_{i,j} \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i \in M_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein (für alle $i \in [n]$ und $j \in [m]$).
Für jedes $j \in [m]$ gilt: In Spalte j der Tabelle A steht in genau $|M_j|$ vielen Zeilen eine Eins; d.h. für $s_j := \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ gilt: $s_j = |M_j|$.
Somit ist $\sum_{j=1}^{m} s_j = \sum_{j=1}^{m} |M_j|$.

[5] Wir modellieren dies als ungerichteten Graphen: Jeder Knoten entspricht einem Gast, und es gibt genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten v und w, wenn die Personen v und w sich zur Begrüßung die Hand schütteln.

Für jedes $i \in [n]$ gilt: In Zeile i der Tabelle A stehen genau so viele Einsen wie es Mengen aus $M_1, \ldots, M_m$ gibt, die x_i als Element enthalten. Somit gilt für $z_i := \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, dass $z_i = \mathit{Anz}(x_i)$ ist.
Daraus folgt, dass $\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{x \in X} \mathit{Anz}(x)$ ist.
Insgesamt erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^{m} |M_j| \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} s_j \quad \stackrel{\text{Regel 4.11}}{=} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i \quad = \quad \sum_{x \in X} \mathit{Anz}(x) \, .$$

□

4.5 Das Schubfachprinzip

Folie 255

Das *Schubfachprinzip* (engl.: *Pigeonhole Principle*, „Taubenschlag-Prinzip“) beruht auf dem folgenden offensichtlichen Sachverhalt: Wenn man $N{+}1$ Dinge in N Schubfächer verteilt, dann wird es zwangsläufig ein Schubfach geben, in dem mindestens 2 Dinge landen. Dies lässt sich zu folgender Regel verallgemeinern:

Regel 4.15 (Schubfachprinzip)**.**
Seien $N, k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Werden $\geqslant N{\cdot}k + 1$ Dinge auf N Schubfächer verteilt, so gibt es mindestens ein Schubfach, in dem mindestens $k{+}1$ Dinge landen.

Mathematisch präzise lässt sich dies wie folgt formulieren:[6]

Seien $N, k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, seien S und D Mengen mit $|S| = N$ und $|D| \geqslant N{\cdot}k + 1$, sei $f : D \to S$. Dann gilt: Es gibt ein $s \in S$ so dass $|f^{-1}(s)| \geqslant k{+}1$.

Beweis. Sei $s_1, \ldots, s_N$ eine Auflistung aller Elemente von S. Für jedes $i \in [N]$ sei[7] $M_i := f^{-1}(s_i)$. Gemäß der Zerlegungsregel (Regel 4.1(c)) gilt:

$$|D| \quad = \quad \sum_{s \in S} |f^{-1}(s)| \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} |f^{-1}(s_i)| \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} |M_i| \, . \qquad (4.10)$$

Wir müssen zeigen, dass es ein $i \in [N]$ gibt, so dass $|M_i| \geqslant k{+}1$ ist.
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an, dass für alle $i \in [N]$ gilt: $|M_i| \leqslant k$.

[6] S entspricht der Menge der Schubfächer, D entspricht der Menge der Dinge, die Funktion f gibt an, welches Ding in welches Schubfach verteilt wird. Für $s \in S$ ist $f^{-1}(s)$ dann die Menge der Dinge, die in Schubfach s landen.

[7] d.h.: M_i ist die Menge aller Dinge aus D, die in Schubfach s_i landen

Dann ist $\sum_{i=1}^{N} |M_i| \leqslant \sum_{i=1}^{N} k = N{\cdot}k$. Unter Verwendung von (4.10) erhalten wir: $|D| \leqslant N{\cdot}k$. Aber gemäß Voraussetzung ist $|D| \geqslant N{\cdot}k + 1$.
Widerspruch! $\square$

Folie 256

Im Folgenden betrachten wir einige Beispiele zur Anwendung des Schubfachprinzips.

Beispiel 4.16. In jeder Menge von 13 Personen befinden sich zwei Personen, die im gleichen Monat Geburtstag haben.

Die 12 Monate Januar, ..., Dezember sind hier die 12 Schubfächer, in die die 13 Personen verteilt werden.

Satz 4.17. *Für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geqslant 2$ gilt: Es gibt zwei Knoten $v, w \in V$ mit $v \neq w$, die denselben Grad haben, d.h.* $\text{Grad}_G(v) = \text{Grad}_G(w)$.

Beweis. Sei $n := |V|$.

Fall 1: Es gibt keinen Knoten $u \in V$ vom Grad 0.
Dann gilt für alle Knoten $v \in V$: $\text{Grad}_G(v) \in \{1, \ldots, n{-}1\}$ (denn: G ist ein ungerichteter Graph, also ist kein Knoten mit sich selbst benachbart; als Nachbarn eines Knotens $v \in V$ kommen also nur die $n{-}1$ Knoten in $V \setminus \{v\}$ in Frage).

D.h.: Wir haben n verschiedene Knoten in V; diese n Knoten werden auf $N := n{-}1$ Schubfächer namens $\{1, \ldots, n{-}1\}$ verteilt: Knoten v kommt in Schubfach $\text{Grad}_G(v)$. Gemäß Schubfachprinzip müssen zwei Knoten im gleichen Schubfach landen, d.h. es gibt zwei Knoten vom gleichen Grad.

Genau das gleiche Argument können wir auch mathematisch formal aufschreiben:

Wir nutzen das Schubfachprinzip (Regel 4.15) für $S := \{1, \ldots, |V|{-}1\}$, $N := |S| = |V|{-}1$, $D := V$ und $k := 1$. Dann ist $|D| = N{+}1 = k{\cdot}N + 1$. Sei $f : D \to S$ die Funktion mit $f(v) := \text{Grad}_G(v)$ f.a. $v \in D$.

Gemäß Schubfachprinzip (Regel 4.15) gibt es ein $s \in S$ mit $|f^{-1}(s)| \geqslant k{+}1 = 2$. D.h.: Es gibt $v, w \in D = V$ mit $v \neq w$ und $\text{Grad}_G(v) = f(v) = f(w) = \text{Grad}_G(w)$.

Fall 2: Es gibt einen Knoten $u \in V$ vom Grad 0.
Dann gibt es keinen Knoten $v \in V$ vom Grad $|V|{-}1$, denn: u ist kein Nachbar von v und v ist auch kein Nachbar von sich selbst — also kommen nur die $|V|{-}2$ Knoten aus $V \setminus \{u, v\}$ als Nachbarn für Knoten v in Frage.

Somit gilt für alle $v \in V$: $\text{Grad}_G(v) \in \{0, \ldots, |V|{-}2\}$.

Ähnlich wie in Fall 1 haben wir auch hier $n = |V|$ verschiedene Knoten in V; diese n Knoten werden auf $N := n{-}1$ Schubfächer namens $\{0, \ldots, n{-}2\}$ verteilt: Knoten v kommt in Schubfach $\text{Grad}_G(v)$. Gemäß Schubfachprinzip müssen zwei Knoten im gleichen Schubfach landen, d.h. es gibt zwei Knoten vom gleichen Grad.

Mathematisch formal können wir dieses Argument wie folgt aufschreiben: Wir nutzen das Schubfachprinzip (Regel 4.15) für $S := \{0, \ldots, |V|{-}2\}$, $N := |S| = |V|{-}1$, $D := V$ und $k := 1$. Dann ist $|D| = N{+}1 = k{\cdot}N + 1$. Sei $f : D \to S$ die Funktion mit $f(v) := \text{Grad}_G(v)$ f.a. $v \in D$.

Gemäß Schubfachprinzip (Regel 4.15) gibt es ein $s \in S$ mit $|f^{-1}(s)| \geqslant k{+}1 = 2$. D.h.: Es gibt $v, w \in D = V$ mit $v \neq w$ und $\text{Grad}_G(v) = f(v) = f(w) = \text{Grad}_G(w)$. □

Folie 257

Im nächsten Anwendungsbeispiel nutzen wir beim Beweis eine Kombination aus vollständiger Induktion und dem Schubfachprinzip.

Definition 4.18.

(a) Ein *Dreieck* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $M = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ mit $|M| = 3$, so dass die die Knoten in M alle miteinander benachbart sind, d.h. $\{v_i, v_j\} \in E$ für alle $i, j \in [3]$ mit $i \neq j$.

(b) Ein ungerichteter Graph heißt *dreiecksfrei*, falls er kein Dreieck enthält.

Beispiel: Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{n,n}$ dreiecksfrei. Dieser Graph hat $2n$ Knoten und n^2 Kanten.

Frage: Wie viele Kanten kann kann ein dreiecksfreier Graph auf $2n$ Knoten maximal haben? *Zur Erinnerung:* Der vollständige Graph K_{2n} auf $2n$ Knoten hat $\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n{-}1) \;=\; n^2 + n{\cdot}(n{-}1)$ Kanten.

Antwort: n^2 — gemäß dem folgenden Satz 4.19.

Satz 4.19 (*Satz von Mantel*, 1907)**.**
Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 2n$ und $|E| > n^2$ gilt: G besitzt ein Dreieck.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion nach n.

INDUKTIONSANFANG: $n = 1$.
Für jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 2$ gilt: $|E| \leqslant 1$.
D.h.: Für $n = 1$ gibt es keinen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 2n$ und $|E| > n^2$. Somit gilt für jeden (der nicht-existierenden) ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 2n = 2$ und $|E| > n^2 = 1$, dass G ein Dreieck besitzt.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \mapsto n{+}1$.
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ beliebig.

Induktionsannahme: Für jeden ungerichteten Graphen $G' = (V', E')$ mit $|V'| = 2n$ und $|E'| > n^2$ gilt: G' besitzt ein Dreieck.

Behauptung: Für jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 2(n{+}1)$ und $|E| > (n{+}1)^2$ gilt: G besitzt ein Dreieck.

Beweis: Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph mit $|V| = 2(n{+}1)$ und $|E| > (n{+}1)^2$, d.h. $|E| \geqslant (n{+}1)^2 + 1$.
Wir müssen zeigen, dass G ein Dreieck besitzt.

Wähle zwei Knoten $x, y \in V$, die durch eine Kante verbunden sind, d.h.: $\{x, y\} \in E$. Sei $G' := (V', E')$ der Graph, der aus G durch Löschen der Knoten x und y entsteht. D.h.: $V' = V \setminus \{x, y\}$ und $E' := \{e \in E \ : \ e \cap \{x, y\} = \emptyset\}$.

Fall 1: $|E'| > n^2$.
Dann ist G' ein Graph mit $2n$ Knoten und mehr als n^2 Kanten. Gemäß Induktionsannahme besitzt G' ein Dreieck $M = \{v_1, v_2, v_3\}$. Da G' ein Teilgraph von G ist, ist M auch ein Dreieck von G.

Fall 2: $|E'| \leqslant n^2$. Sei F die Menge aller Kanten von G, die genau einen der beiden Knoten x, y als Endpunkt haben. Dann gilt:

$$E \quad = \quad E' \ \dot\cup \ F \ \dot\cup \ \big\{ \{x, y\} \big\} \ .$$

Also ist $|F| = |E| - |E'| - 1$.
Wegen $|E'| \leqslant n^2$ ist daher $|F| \geqslant |E| - n^2 - 1$.
Wegen $|E| \geqslant (n{+}1)^2 + 1$ ist also

$$|F| \quad \geqslant \quad (n{+}1)^2 - n^2 \quad = \quad n^2 + 2n + 1 - n^2 \quad = \quad 2n + 1 \ .$$

Wir wissen: $|V'| = 2n$ und $V = V' \dot\cup \{x, y\}$. Sei $v_1, \ldots, v_{2n}$ eine Auflistung aller Knoten in V'. Es gilt:

$$F \quad \subseteq \quad \big\{ \{x, v_i\} : i \in [2n] \big\} \ \cup \ \big\{ \{y, v_i\} : i \in [2n] \big\} \qquad \text{und} \qquad |F| \geqslant 2n{+}1 \ .$$

Gemäß Schubfachprinzip[8] muss es daher ein $i \in [2n]$ geben, so dass $\{x, v_i\} \in F$ und $\{y, v_i\} \in F$.
Somit gilt: $\{x, v_i\} \in E$ und $\{y, v_i\} \in E$ und $\{x, y\} \in E$. Also bilden die Knoten x, y, v_i ein Dreieck in G. □

4.6 Der Satz von Ramsey

Folie 258

Die *Ramsey-Theorie* ist ein Zweig der Kombinatorik, der von Frank P. Ramsey (1903–1930) gegründet wurde. Er beschäftigt sich mit Kanten-Färbungen von Graphen und Verallgemeinerungen hiervon.

Einen beliebigen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $n := |V|$ Knoten stellen wir uns hierbei als Kanten-gefärbte Version des vollständigen Graphen K_n vor: Für jedes $e \in E$ erhält die Kante e in K_n die Farbe *rot*. Für jedes $e \in \mathcal{P}_2(V)$ mit $e \notin E$ erhält die Kante e in K_n die Farbe *blau*.

Wir behandeln hier nur die einfachste Version der Aussage von Rameys Theorem. Dazu benötigen wir die folgenden Begriffe.

Folie 259

Definition 4.20. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

(a) Eine *Clique* der Größe k in G ist eine Menge C von k Knoten von G, die paarweise benachbart zu einander sind. D.h.: $C \subseteq V$ mit $|C| = k$ und es gilt $\{v, w\} \in E$ für alle $v, w \in C$ mit $v \neq w$.

    Unter Verwendung von den in Kapitel 3 eingeführten Notationen lässt sich dies kurz schreiben als $G_{|C} \cong K_k$.[9]

(b) Eine *unabhängige Menge* der Größe k in G ist eine Menge U von k Knoten von G, die paarweise nicht miteinander benachbart sind. D.h.: $U \subseteq V$ mit $|U| = k$ und es gilt $\{v, w\} \notin E$ für alle $v, w \in U$ mit $v \neq w$.

    Unter Verwendung von den in Kapitel 3 eingeführten Notationen lässt sich dies kurz schreiben als $G_{|U} \cong (U, \emptyset)$.[10]

Folie 260

[8] Wir nutzen $N := 2n$ Schubfächer namens $1, \ldots, N$. Die Dinge, die in diese Schubfächer verteilt werden, sind die Elemente in F. Jede Kante $e \in F$ landet in Schubfach $i \in [N]$, falls der Knoten v_i ein Endpunkt der Kante e ist. Da $|F| \geqslant N{+}1$ ist, müssen 2 Kanten im gleichen Schubfach landen. D.h. es gibt ein $i \in [N]$ und zwei Kanten $e, e' \in F$ mit $e \neq e'$, die beide den Knoten v_i als Endpunkt haben. Der andere Endpunkt der Kanten e, e' kann jeweils nur der Knoten x oder der Knoten y sein.

[9] D.h. der durch C induzierte Teilgraph von G ist ein vollständiger Graph auf k Knoten.

[10] D.h. der durch U induzierte Teilgraph von G besitzt keine Kante(n).

Der Satz von Ramsey besagt Folgendes für beliebige Zahlen $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$:

In jeder hinreichend großen Gruppe von Personen gibt es eine Gruppe von k Personen, die sich alle untereinander kennen (d.h. eine Clique der Größe k) oder eine Gruppe von ℓ Personen, die sich alle gegenseitig unbekannt sind (d.h. eine unabhängige Menge der Größe ℓ).

Diese Aussage wird durch den folgenden Satz formalisiert, der auch angibt, was genau mit „hinreichend groß" gemeint ist.

Satz 4.21 (Satz von Ramsey). *Für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es eine Zahl*[11] *$R(k, \ell) \in \mathbb{N}$, so dass für jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geqslant R(k, \ell)$ mindestens eine der beiden folgenden Aussagen erfüllt ist:*

(A) G besitzt eine Clique der Größe k.

(B) G besitzt eine unabhängige Menge der Größe ℓ.

Außerdem gilt: $R(k, \ell) \leqslant \binom{k+\ell-2}{k-1}$.

Beweis. Per Induktion nach $k+\ell$.

INDUKTIONSANFANG: Betrachte beliebige $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ mit $k = 1$ oder $\ell = 1$. In jedem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geqslant 1$ können wir einfach einen beliebigen Knoten $v \in V$ wählen und $M := \{v\}$ setzen. M ist sowohl eine Clique der Größe 1 als auch eine unabhängige Menge der Größe 1. Insbesondere ist also im Fall $k = 1$ die Aussage (A) und im Fall $\ell = 1$ die Aussage (B) erfüllt.

Wir müssen nur noch nachrechnen, dass $\binom{k+\ell-2}{k-1} \geqslant 1$ ist.

Wir nutzen die Gleichung $\binom{N}{K} = \binom{N}{N-K}$ (Satz 4.8(a)) für $N := k+\ell-2$ und $K := k-1$ und beachten, dass dann $N-K = \ell-1$ ist. Laut Voraussetzung ist $k = 1$ oder $\ell = 1$. Also gilt: $\binom{k+\ell-2}{k-1} = \binom{k+\ell-2}{\ell-1} = \binom{k+\ell-2}{0} = 1$ (gemäß Beobachtung 4.4(a)).

INDUKTIONSSCHRITT: Betrachte beliebige $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ mit $k \geqslant 2$ und $\ell \geqslant 2$. *Induktionsannahme:* Für alle $k', \ell' \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ mit $k'+\ell' < k+\ell$ gilt: Es gibt eine Zahl $R(k', \ell') \in \mathbb{N}$ mit $R(k', \ell') \leqslant \binom{k'+\ell'-2}{k'-1}$, so dass für jeden ungerichteten Graphen $G' = (V', E')$ mit $|V'| \geqslant R(k', \ell')$ gilt:

(A) G' besitzt eine Clique der Größe k' oder
(B) G' besitzt eine unabhängige Menge der Größe ℓ'.

[11] Die kleinstmögliche Zahl, die man als $R(k, \ell)$ wählen kann wird „die zu k und ℓ gehörige *Ramsey-Zahl*" genannt.

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph mit $|V| \geqslant \binom{k+\ell-2}{k-1}$.
Behauptung: G besitzt eine Clique der Größe k oder eine unabhängige Menge der Größe ℓ.

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Knoten $v \in V$. Sei V_1 die Menge aller Nachbarn von v in G, und sei V_2 die Menge aller Knoten $\neq v$ in V, die keine Nachbarn von v in G sind. Dann gilt: $V = \{v\} \dot\cup V_1 \dot\cup V_2$.
Sei $G_1 := G_{|V_1}$ und $G_2 := G_{|V_2}$.
Sei $k_1 := k-1$ und $\ell_1 := \ell$. Sei $k_2 := k$ und $\ell_2 := \ell-1$. Dann gilt:
$k_1+\ell_1 = k_2+\ell_2 = k+\ell-1$. Somit können wir die Induktionsannahme sowohl auf die Zahlen k_1, ℓ_1 als auch auf die Zahlen k_2, ℓ_2 anwenden.

Fall 1: $|V_1| \geqslant R(k_1, \ell_1)$.
Dann liefert die Induktionsannahme, dass für die Zahlen k_1, ℓ_1 und den Graphen G_1 gilt:

(A) G_1 besitzt eine Clique C_1 der Größe k_1 oder
(B) G_1 besitzt eine unabhängige Menge U_1 der Größe ℓ_1.

Wenn (B) gilt, dann ist U_1 eine unabhängige Menge der Größe $\ell_1 = \ell$ in G.
Wenn (B) nicht gilt, muss (A) gelten. Dann ist $C := C_1 \cup \{v\}$ eine Clique der Größe k in G, denn: $|C| = k_1+1 = k$, und v ist adjazent zu jedem Knoten in V_1, also insbes. auch zu jedem Knoten in C_1.
D.h. in Fall 1 ist die Behauptung bewiesen.

Fall 2: $|V_2| \geqslant R(k_2, \ell_2)$.
Dann liefert die Induktionsannahme, dass für die Zahlen k_2, ℓ_2 und den Graphen G_2 gilt:

(A) G_2 besitzt eine Clique C_2 der Größe k_2 oder
(B) G_2 besitzt eine unabhängige Menge U_2 der Größe ℓ_2.

Wenn (A) gilt, so ist C_2 eine Clique der Größe $k_2 = k$ in G.
Wenn (A) nicht gilt, muss (B) gelten. Dann ist $U := U_2 \cup \{v\}$ eine unabhängige Menge der Größe ℓ in G, denn: $|U| = \ell_2+1 = \ell$, und v ist zu keinem Knoten aus V_2 adjazent, also insbes. auch zu keinem Knoten in U_2.
D.h. in Fall 2 ist die Behauptung bewiesen.

Wir schließen den Beweis ab, indem wir zeigen, dass einer der beiden Fälle 1 bzw. 2 eintreten muss. Wir führen einen indirekten Beweis.
Angenommen, $|V_1| < R(k_1, \ell_1)$ und $|V_2| < R(k_2, \ell_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|V| &= 1 + |V_1| + |V_2| \\
&\leqslant 1 + R(k_1, \ell_1) - 1 + R(k_2, \ell_2) - 1 \\
&\leqslant 1 + \binom{k_1+\ell_1-2}{k_1-1} - 1 + \binom{k_2+\ell_2-2}{k_2-1} - 1 \\
&< \binom{k_1+\ell_1-2}{k_1-1} + \binom{k_2+\ell_2-2}{k_2-1} .
\end{aligned}$$

Beachte, dass $k_1+\ell_1-2 = k_2+\ell_2-2 = k+\ell-3$ und $k_1-1 = k-2$ und $k_2-1 = k-1$. Wir nutzen die Gleichung $\binom{N+1}{K} = \binom{N}{K-1} + \binom{N}{K}$ (Pascal'scher Rekurrenzsatz, Satz 4.5) für $N := k+\ell-3$ und $K := k-1$ und erhalten dadurch Folgendes:

$$\begin{array}{rcl} |V| & < & \binom{k_1+\ell_1-2}{k_1-1} + \binom{k_2+\ell_2-2}{k_2-1} \\ & = & \binom{k+\ell-3}{k-2} + \binom{k+\ell-3}{k-1} \\ & = & \binom{k+\ell-2}{k-1}\,. \end{array}$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Wahl von G, da ja $|V| \geqslant \binom{k+\ell-2}{k-1}$ ist. Dies beendet den Beweis von Satz 4.21. $\square$

4.7 Literaturhinweise

Als vertiefende Lektüre seien Kapitel 1 von [Ste07] und Kapitel 3 von [Juk08] sowie das Lehrbuch [Cam94] empfohlen.

Quellennachweis: Teile der Kapitel 4.1– 4.5 basieren auf Teilen von Kapitel 1 von [Ste07] und Kapitel 3 von [Juk08].