

Kapitel 3

Graphen und Bäume

Bei Modellierungsaufgaben geht es oft darum, *Objekte* sowie *Beziehungen* zwischen Objekten zu beschreiben. Graphen und Bäume eignen sich dazu oft besonders gut.

Folie 124

Anschaulich besteht ein Graph aus *Knoten* und *Kanten*:

- “Knoten” repräsentieren dabei “gleichartige Objekte”.
- “Kanten” repräsentieren Beziehungen zwischen je zwei “Objekten”.

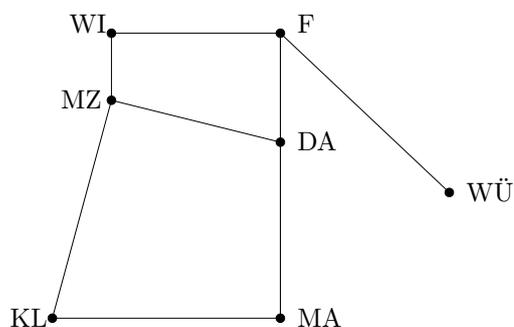
Je nach Aufgabenstellung werden *ungerichtete* Graphen oder *gerichtete* Graphen verwendet.

Bäume sind Graphen mit bestimmten Eigenschaften.

Folie 125

Beispiel 3.1.

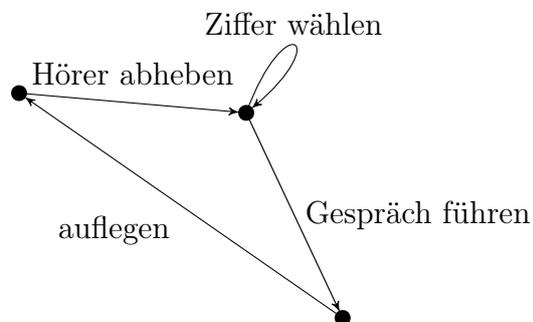
- (a) Skizze eines *ungerichteten* Graphen, der die Autobahnverbindungen zwischen einigen Städten darstellt:



DA	≐	Darmstadt
F	≐	Frankfurt
KL	≐	Kaiserslautern
MA	≐	Mannheim
MZ	≐	Mainz
WI	≐	Wiesbaden
WÜ	≐	Würzburg

Folie 126

- (b) Skizze eines *gerichteten* Graphen, der den prinzipiellen Ablauf eines Telefonats darstellt:



3.1 Gerichtete und ungerichtete Graphen

Grundlegende Definitionen

Folie 127

Ungerichtete Graphen

Definition 3.2.

Ein *ungerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V , die *Knotenmenge* von G genannt wird, und einer Menge

$$E \subseteq \{\{i, j\} : i \in V, j \in V, i \neq j\},$$

die *Kantenmenge* von G genannt wird. Die Elemente aus V heißen *Knoten* von G (auch: “Ecken”; englisch: *vertices*, singular: *vertex*); die Elemente aus E heißen *Kanten* von G (englisch: *edges*, singular: *edge*).

Ein ungerichteter Graph G heißt *endlich*, falls seine Knotenmenge endlich ist.

Beispiel 3.3. $G = (V, E)$ mit

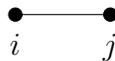
$$V := \{ \text{MZ, WI, MA, DA, KL, F, WÜ} \} \quad \text{und}$$

$$E := \{ \{ \text{MZ, WI} \}, \{ \text{WI, F} \}, \{ \text{F, DA} \}, \{ \text{F, WÜ} \}, \\ \{ \text{MZ, DA} \}, \{ \text{MZ, KL} \}, \{ \text{KL, MA} \}, \{ \text{DA, MA} \} \}$$

ist ein ungerichteter Graph, der die Autobahnverbindungen zwischen Mainz (MZ), Wiesbaden (WI), Mannheim (MA), Darmstadt (DA), Kaiserslautern (KL), Frankfurt (F) und Würzburg (WÜ) repräsentiert. Beispiel 3.1(a) zeigt diesen Graphen G in *graphischer Darstellung*: Knoten werden als Punkte dargestellt, Kanten als Verbindungslinien zwischen Punkten.

Beachte. Laut Definition 3.2 gibt es zwischen zwei Knoten i und j aus V

- *höchstens* eine Kante; diese wird mit $\{i, j\}$ bezeichnet und graphisch dargestellt als



- *keine* Kante, falls $i = j$ ist. In der graphischen Darstellung eines ungerichteten Graphen sind also „Schleifen“ der Form



nicht erlaubt.

Jede Kante $\{i, j\}$ eines ungerichteten Graphen ist also eine 2-elementige Menge von Knoten des Graphen.

Bemerkung. In der Literatur wird zumeist die oben genannte Definition von ungerichteten Graphen verwendet. Davon abweichend erlauben einige Bücher in ungerichteten Graphen aber auch „Schleifen“ der Form



Folie 131

Notation 3.4. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Ein Knoten $v \in V$ heißt *inzident* mit einer Kante $e \in E$, falls $v \in e$.
- Die beiden mit einer Kante $e \in E$ inzidenten Knoten nennen wir die *Endknoten* von e , und wir sagen, dass e diese beiden Knoten *verbindet*.
- Zwei Knoten $v, w \in V$ heißen *benachbart* (bzw. *adjazent*), falls es eine Kante $e \in E$ gibt, deren Endknoten v und w sind (d.h. $e = \{v, w\}$).
- Falls v und w zwei benachbarte Knoten sind, so sagen wir auch: w ist ein *Nachbar* von Knoten v .

Folie 132

Definition 3.5 (Grad).

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher ungerichteter Graph und sei $v \in V$ ein Knoten von G . Der *Grad von v in G* (engl.: degree), kurz: $\text{Grad}_G(v)$, ist die Anzahl der Kanten, die v als Endknoten haben. D.h.

$$\text{Grad}_G(v) = |\{e \in E : v \in e\}|.$$

Der *Grad von G* ist

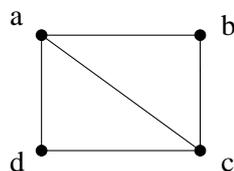
$$\text{Grad}(G) := \max \{\text{Grad}_G(v) : v \in V\},$$

d.h. $\text{Grad}(G)$ gibt den maximalen Grad eines Knotens von G an.¹

Folie 133

Beispiel.

Für den Graphen $G =$



gilt: $\text{Grad}_G(a) = 3$, $\text{Grad}_G(b) = 2$, $\text{Grad}_G(c) = 3$, $\text{Grad}_G(d) = 2$ und $\text{Grad}(G) = 3$.

Folie 134

¹Ist M eine endliche, nicht-leere Menge von Zahlen, so bezeichnet $\max M$ das größte Element von M .

Gerichtete Graphen

Definition 3.6.

Ein *gerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V , die *Knotenmenge* von G genannt wird, und einer Menge

$$E \subseteq \{(i, j) : i \in V, j \in V\},$$

die *Kantenmenge* von G genannt wird. Die Elemente aus V heißen *Knoten* (bzw. "Ecken"), die Elemente aus E heißen (gerichtete) *Kanten* von G . Ein gerichteter Graph G heißt *endlich*, falls seine Knotenmenge endlich ist.

Folie 135

Beispiel 3.7. $G = (V, E)$ mit

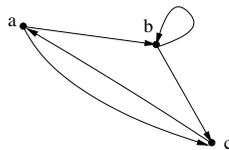
$$\begin{aligned} V &:= \{a, b, c\} \quad \text{und} \\ E &:= \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (a, c)\} \end{aligned}$$

ist ein gerichteter Graph.

In der *graphischen Darstellung* eines gerichteten Graphen werden Knoten werden als Punkte dargestellt. Eine Kante der Form (i, j) wird als Pfeil von Knoten i nach Knoten j dargestellt, also



Der gerichtete Graph aus Beispiel 3.7 lässt sich in graphischer Darstellung also wie folgt darstellen:



Folie 136

Notation 3.8. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

- Ist $e = (i, j) \in E$, so heißt i der *Ausgangsknoten* von e und j der *Endknoten* von e , und wir sagen, dass e *von i nach j verläuft*.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt *inzident* mit einer Kante $e \in E$, falls v der Ausgangs- oder der Endknoten von e ist.

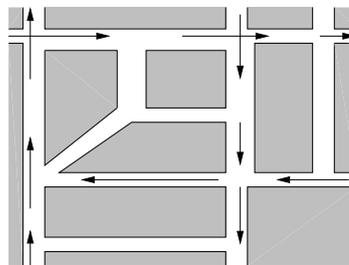
- Zwei Knoten $v, w \in V$ heißen *benachbart* (bzw. *adjazent*), falls $(v, w) \in E$ oder $(w, v) \in E$.
- Eine Kante der Form (v, v) wird *Schleife* genannt. D.h.: Eine Schleife ist eine Kante, deren Ausgangs- und Endknoten identisch ist.

Folie 137

Modellierung durch gerichtete Graphen

Beispiel 3.9.

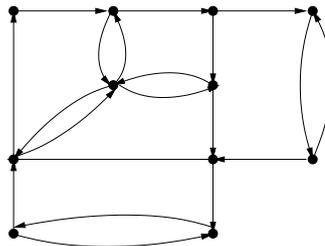
In der folgenden Straßenkarte sind Einbahnstraßen durch Pfeile markiert.



Diese Straßenkarte können wir durch einen gerichteten Graphen repräsentieren, der für jede Straßenkreuzung einen Knoten enthält, und in dem es eine Kante von "Kreuzung" i zu "Kreuzung" j gibt, falls man von i nach j fahren kann, ohne zwischendurch eine weitere Kreuzung zu passieren.

Folie 138

Graphisch lässt sich dieser gerichtete Graph folgendermaßen darstellen:



Folie 139

Weitere Beispiele zur Modellierung durch Graphen:

- Computer-Netzwerk:
Knoten repräsentieren Computer; Kanten repräsentieren Netzwerkverbindungen

- das World Wide Web:
Knoten repräsentieren Webseiten; Kanten repräsentieren Hyperlinks

Folie 140

Definition 3.10.

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph und sei $v \in V$ ein Knoten von G .

- Der *Ausgangsgrad* von v in G (engl.: out-degree), kurz: $\text{Aus-Grad}_G(v)$, ist die Anzahl der Kanten, die v als Ausgangsknoten haben. D.h.:

$$\text{Aus-Grad}_G(v) = |\{e \in E : \text{es ex. } v' \in V \text{ s.d. } e = (v, v')\}|.$$

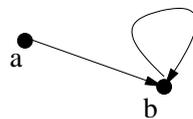
- Der *Eingangsgrad* von v in G (engl.: in-degree), kurz: $\text{Ein-Grad}_G(v)$, ist die Anzahl der Kanten, die v als Eingangsknoten haben. D.h.:

$$\text{Ein-Grad}_G(v) = |\{e \in E : \text{es ex. } v' \in V \text{ s.d. } e = (v', v)\}|.$$

Folie 141

Beispiel.

Für den Graphen $G =$



gilt: $\text{Ein-Grad}_G(a) = 0$, $\text{Ein-Grad}_G(b) = 2$, $\text{Aus-Grad}_G(a) = 1$,
 $\text{Aus-Grad}_G(b) = 1$.

Folie 142

Verschiedene Arten der Darstellung von Graphen

Bemerkung 3.11.

Es gibt mehrere Arten Graphen darzustellen, zum Beispiel

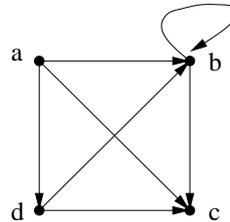
- *abstrakt*, durch Angabe der Knotenmenge V und der Kantenmenge E .

Beispiel: $G_1 = (V_1, E_1)$ mit

$$V_1 := \{ a, b, c, d \} \text{ und}$$

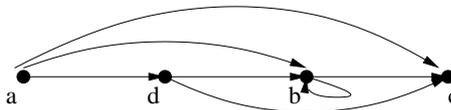
$$E_1 := \{ (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c) \}.$$

- *graphisch* (bzw. *anschaulich*): Der obige Beispiel-Graph G_1 kann graphisch dargestellt werden durch



Folie 143

oder, äquivalent dazu, durch



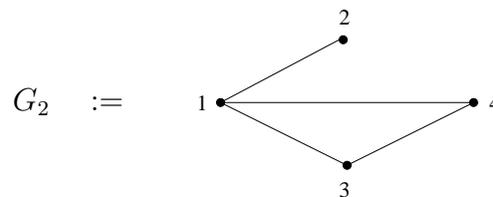
Folie 144

- durch Angabe einer *Adjazenzliste*, die zu jedem Knoten i eine Liste aller Knoten angibt, zu denen eine von i ausgehende Kante führt. Der Beispiel-Graph G_1 wird durch folgende Adjazenzliste repräsentiert:

Knoten	Nachfolger
a	b, c, d
b	b, c
c	
d	b, c

Folie 145

Auf die gleiche Art können auch *ungerichtete* Graphen durch eine Adjazenzliste repräsentiert werden. Beispielweise der Graph



durch die Adjazenzliste

Knoten	Nachbarn
1	2, 3, 4
2	1
3	1, 4
4	1, 3

Folie 146

- durch Angabe einer *Adjazenzmatrix*, d.h. einer Tabelle, deren Zeilen und Spalten mit Knoten beschriftet sind, und die in der mit Knoten i beschrifteten Zeile und der mit Knoten j beschrifteten Spalte
 - den Eintrag 1 hat, falls es eine Kante von Knoten i nach Knoten j gibt, und
 - den Eintrag 0 hat, falls es keine Kante von i nach j gibt.

Beispielsweise sieht die Adjazenzmatrix des gerichteten Graphen G_1 wie folgt aus:

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	0	0
d	0	1	1	0

Folie 147

Die Adjazenzmatrix des ungerichteten Graphen G_2 ist:

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	0	0
3	1	0	0	1
4	1	0	1	0

Wege in Graphen

Folie 148

Definition 3.12 (Wege und Kreise).Sei $G = (V, E)$ ein (gerichteter oder ungerichteter) Graph.(a) Ein *Weg* in G ist ein Tupel

$$(v_0, \dots, v_\ell) \in V^{\ell+1},$$

für ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq i < \ell$ gilt:

- falls G ein gerichteter Graph ist, so ist $(v_i, v_{i+1}) \in E$,
- falls G ein ungerichteter Graph ist, so ist $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Das Tupel (v_0, \dots, v_ℓ) wird dann *ein Weg von v_0 nach v_ℓ* genannt. ℓ ist die *Länge des Weges*. D.h.: Die *Länge* des Weges gibt an, wie viele *Kanten* auf dem Weg durchlaufen werden.

Beachte.

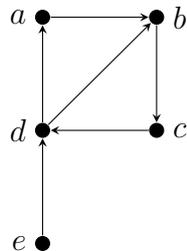
Gemäß dieser Definition ist für jedes $v \in V$ das Tupel (v) ein Weg der Länge 0 von v nach v .

Folie 149

- (b) Ein Weg (v_0, \dots, v_ℓ) heißt *einfach*, wenn kein Knoten mehr als einmal in dem Weg vorkommt — d.h. die Knoten v_0, \dots, v_ℓ sind paarweise² verschieden, d.h. $|\{v_0, \dots, v_\ell\}| = \ell + 1$.
- (c) Ein Weg (v_0, \dots, v_ℓ) heißt *Kreis*, wenn $\ell \geq 1$ und $v_\ell = v_0$ ist.
- (d) Ein Kreis (v_0, \dots, v_ℓ) heißt *einfach*, wenn keine Kante mehrfach durchlaufen wird und — abgesehen vom Start- und Endknoten — kein Knoten mehrfach besucht wird. D.h.:
- In einem *gerichteten* Graphen G sind *einfache* Kreise genau die Wege der Form (v_0, \dots, v_ℓ) , für die gilt: $\ell \geq 1$ und $v_\ell = v_0$ und $|\{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}| = \ell$.
 - In einem *ungerichteten* Graphen G sind *einfache* Kreise genau die Wege der Form (v_0, \dots, v_ℓ) , für die gilt: $\ell \geq 3$ und $v_\ell = v_0$ und $|\{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}| = \ell$.

Beispiel 3.13.

(a) Für den Graphen

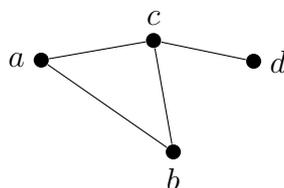


gilt:

- (e, d, b, c, d) ist ein Weg der Länge 4, aber kein einfacher Weg.
- (d, b, c, d) ist ein einfacher Kreis.
- (e, d, a, b) ist ein einfacher Weg.
- (b, d, a) ist kein Weg.
- (a, b, c, d, b, c, d, a) ist ein Kreis, aber kein einfacher Kreis.

Folie 151

(b) Für den Graphen



gilt:

- (a, b, c, a) ist ein einfacher Kreis.
- (c, d, c) ist ein Kreis, aber kein einfacher Kreis.
- (a, c, d) ist ein einfacher Weg.
- (c, b, a, c, d) ist ein Weg, aber kein einfacher Weg.

Folie 152

Definition 3.14 (azyklischer Graph, DAG).

²Der Begriff „paarweise verschieden“ ist Mathematik-Jargon. Die Aussage „seien x_1, \dots, x_n paarweise verschieden“ bedeutet, dass x_1, \dots, x_n alle verschieden voneinander sind, d.h. $x_i \neq x_j$ f.a. $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$.

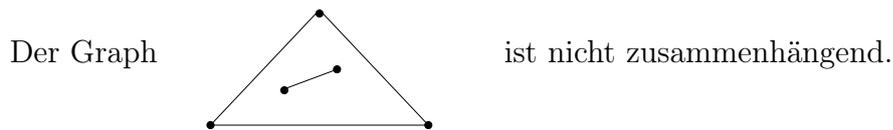
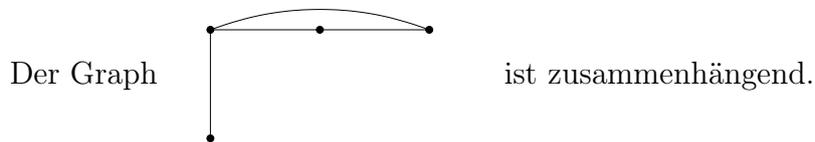
- (a) Ein Graph heißt *azyklisch*, falls er keinen einfachen Kreis enthält.
- (b) Gerichtete azyklische Graphen werden im Englischen *directed acyclic graph*, kurz: *DAG*, genannt.

Folie 153

Definition 3.15 (zusammenhängend, stark zusammenhängend).

- (a) Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, wenn für alle Knoten $v, w \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg von v nach w .

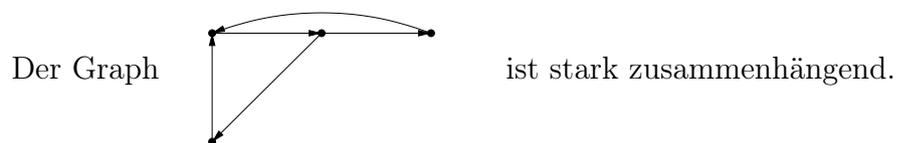
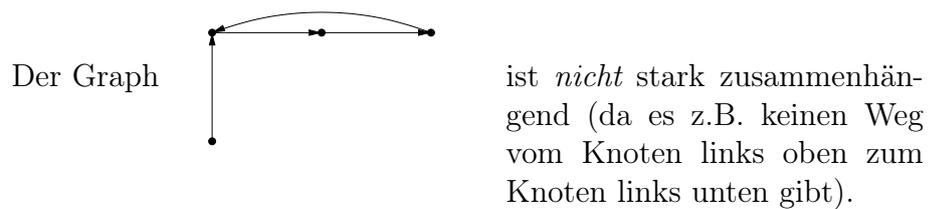
Beispiel.



Folie 154

- (b) Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *stark zusammenhängend*, wenn für alle Knoten $v, w \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg von v nach w .

Beispiel.



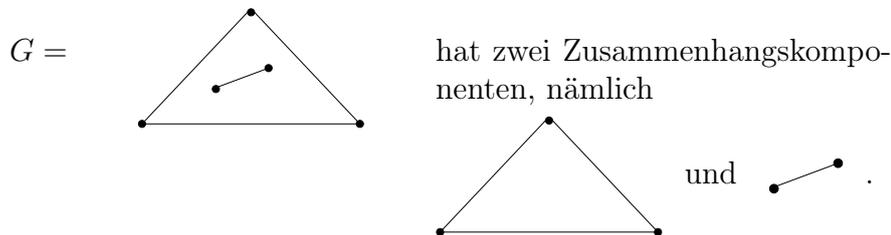
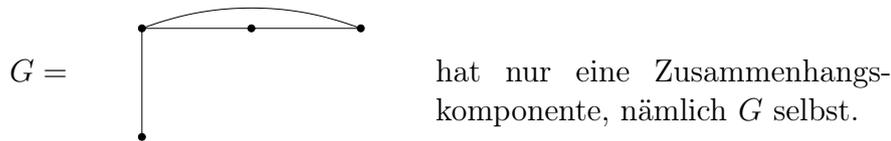
Folie 155

Definition 3.16 (Zusammenhangskomponente, starke Zusammenhangskomponente).

(a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Zusammenhangskomponente* von G , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) G' ist ein Teilgraph von G , d.h. $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$,
- (2) G' ist zusammenhängend und
- (3) für jeden zusammenhängenden Teilgraphen $G'' = (V'', E'')$ von G mit $V' \subseteq V''$ und $E' \subseteq E''$ gilt: $V' = V''$ und $E' = E''$.

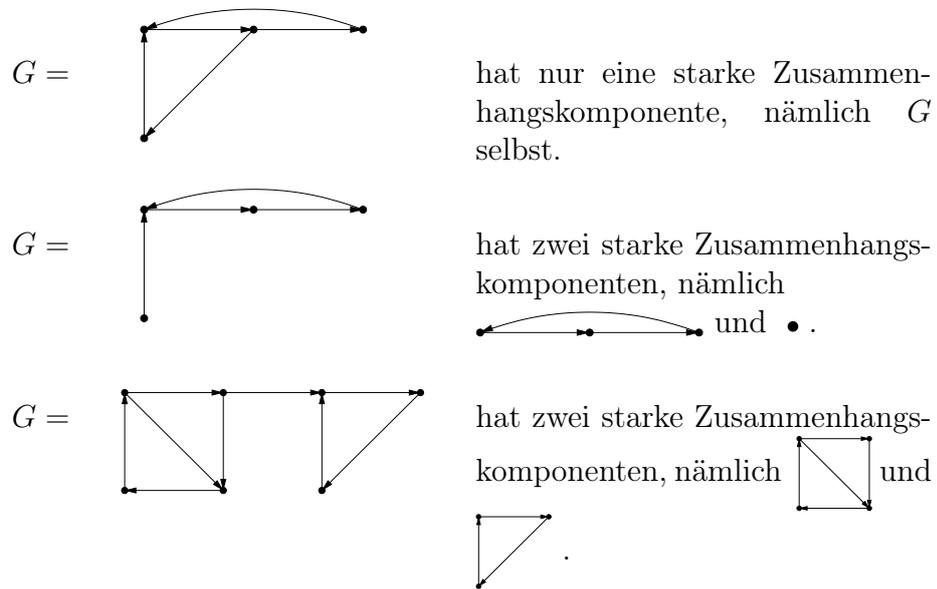
Beispiel.



(b) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *starke Zusammenhangskomponente* von G , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) G' ist ein Teilgraph von G ,
- (2) G' ist stark zusammenhängend und
- (3) für jeden stark zusammenhängenden Teilgraphen $G'' = (V'', E'')$ von G mit $V' \subseteq V''$ und $E' \subseteq E''$ gilt: $V' = V''$ und $E' = E''$.

Beispiel.



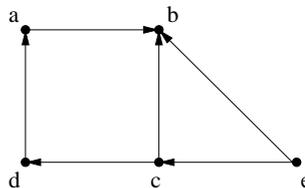
Folie 156

Definition 3.17 (Hamilton-Kreise und Hamilton-Wege).

Sei $G = (V, E)$ ein (gerichteter oder ein ungerichteter) Graph.

- (a) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt *Hamilton-Weg*, wenn jeder *Knoten* aus V genau einmal in W vorkommt.
- (b) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt *Hamilton-Kreis*, wenn $\ell \geq 1$ und $v_\ell = v_0$ und $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ ein Hamilton-Weg ist.

Beispiel. Der Graph G



hat einen Hamilton-Weg, nämlich (e, c, d, a, b) , aber keinen Hamilton-Kreis (da $\text{Aus-Grad}_G(b) = 0$ ist).

Folie 157

Travelling Salesman Problem

Ein Anwendungsbeispiel:

Beim Problem des *Handlungsreisenden* (engl.: *Travelling Salesman Problem*, kurz: *TSP*) geht es darum, eine Rundreise durch n Städte so durchzuführen, dass jede Stadt genau 1 mal besucht wird. Es geht also darum, einen Hamilton-Kreis zu finden. Das Problem, zu einem gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er einen Hamilton-Kreis besitzt, ist algorithmisch ein schwieriges Problem: Man kann zeigen, dass es NP-vollständig ist.

Folie 158

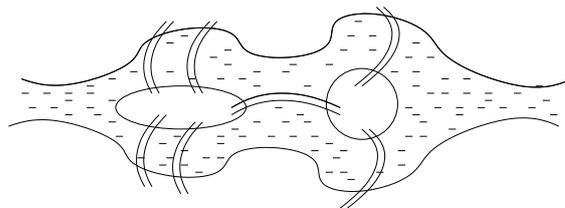
Im Gegensatz zu *Hamilton-Wegen* (bei denen es darum geht, einen Weg zu finden, der jeden *Knoten* des Graphen genau einmal besucht), geht es bei den im Folgenden betrachteten *Euler-Wegen* darum, einen Weg zu finden, der jede *Kante* des Graphen genau einmal besucht.

Folie 159

Königsberger Brückenproblem

Beispiel 3.18.

In der Stadt Königsberg gab es im 18. Jahrhundert 7 Brücken über den Fluss Pregel, die die Ufer und 2 Inseln auf die in der folgenden Skizze dargestellten Art miteinander verbanden.

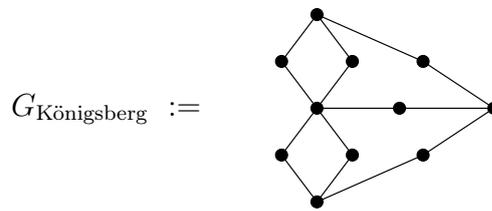


Frage. Gibt es einen Spaziergang, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

Die obige Skizze lässt sich folgendermaßen durch einen ungerichteten Graphen modellieren: für jedes Ufer, jede Insel und jede Brücke gibt es einen Knoten; Kanten zeigen direkte Verbindungen an.

Folie 160

Die Skizze wird also durch folgenden Graphen repräsentiert:



Die Frage nach dem “Spaziergang” entspricht dann gerade der Frage:

Gibt es in $G_{\text{Königsberg}}$ einen *Euler-Kreis*?

Folie 161

Definition 3.19 (Euler-Kreise und Euler-Wege).

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- (a) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt *Euler-Weg*, wenn W jede Kante aus E genau einmal durchläuft, d.h. wenn es für jedes $e \in E$ genau ein $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ gibt, so dass $e = \{v_i, v_{i+1}\}$.
- (b) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt *Euler-Kreis*, wenn W ein Euler-Weg ist und $v_0 = v_\ell$ ist.

Satz 3.20 (Existenz von Euler-Kreisen und Euler-Wege).

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph, dessen Knotenmenge endlich ist. Dann gilt:

- (a) G besitzt einen Euler-Kreis
 \iff
 jeder Knoten von G hat einen geraden Grad (d.h. ist mit einer geraden Anzahl von Kanten inzident).
- (b) G besitzt einen Euler-Weg, der kein Euler-Kreis ist
 \iff
 es gibt in G genau zwei Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis:

- (a) “ \implies ”: Sei $K = (v_0, \dots, v_\ell)$ ein Euler-Kreis. Insbesondere gilt: $v_0 = v_\ell$.
Schritt 1: Jeder Knoten $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ hat geraden Grad, denn:
 Sei $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ beliebig. Zu jedem $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ mit $v = v_i$ gibt es im Euler-Kreis K zwei verschiedene Kanten, nämlich

- $\{v_{i-1}, v_i\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\}$, falls $i \neq 0$, bzw.
- $\{v_0, v_1\}$ und $\{v_{\ell-1}, v_0\}$, falls $i = 0$ (beachte: $v_0 = v_\ell$).

Da der Euler-Kreis K jede Kante von G genau einmal enthält, gilt somit Folgendes: Ist $k = |\{i \in \{0, \dots, \ell - 1\} : v = v_i\}|$ (d.h. k gibt an, wie oft v im Tupel $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ vorkommt), so ist $\text{Grad}_G(v) = 2 \cdot k$. Daher hat jeder Knoten $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ geraden Grad.

Schritt 2: $\{v_0, \dots, v_{\ell-1}\} = V$, denn:

Laut Voraussetzung ist G zusammenhängend. Für beliebige Knoten $v, w \in V$ gilt daher: es gibt in G einen Weg von v nach w . Da K ein Euler-Kreis ist, enthält K sämtliche Kanten, die auf dem Weg von v nach w vorkommen. Insbesondere gilt also f.a. $v, w \in V$, dass $v, w \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$.

Zusammenfassung: Aus den Schritten 1 und 2 folgt direkt, dass jeder Knoten von G geraden Grad hat.

“ \Leftarrow ”: Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Es sei

$$W = (v_0, \dots, v_\ell)$$

ein Weg *maximaler Länge* in G , der *keine Kante(n) mehrfach* enthält. Da wir W nicht mehr verlängern können, liegen alle mit v_ℓ inzidenten Kanten auf W . Da laut unserer Voraussetzung die Anzahl dieser Kanten gerade ist, folgt $v_\ell = v_0$.

Zu zeigen: W ist ein Euler-Kreis.

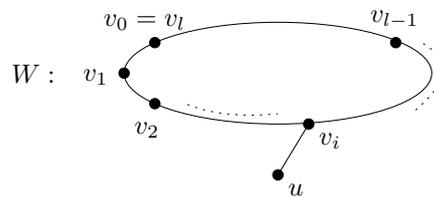
Angenommen, W ist *kein* Euler-Kreis.

Dann gibt es in G eine Kante e' , die nicht auf W liegt. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen Weg, der von einem Endknoten von e' zu einem zu W gehörenden Knoten führt. Sei e die erste Kante auf diesem Weg, die einen Endpunkt in W hat. Sei v_i der zu e inzidente Knoten aus W und sei $u \in V$ der andere zu e inzidente Knoten, d.h. $e = \{u, v_i\}$. Dann ist der Weg

$$W' := (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{\ell-1}, v_0, v_1, \dots, v_i)$$

ein Weg der Länge $\ell+1$, der keine Kante(n) mehrfach enthält.

Skizze:



Dies widerspricht aber der Tatsache, dass W ein Weg *maximaler* Länge ist.

- (b) Die Richtung “ \implies ” folgt analog zu (a): Sei $K = (v_0, \dots, v_\ell)$ ein Euler-Weg, der kein Euler-Kreis ist. Man sieht leicht, dass die beiden Endknoten von K ungeraden Grad haben, und dass alle anderen Knoten geraden Grad haben.

Zum Beweis der Richtung “ \impliedby ” kann man (a) verwenden: Seien x und y die beiden Knoten von G , die ungeraden Grad haben. Wir betrachten den Graphen $G' := (V', E')$ mit $V' := V \cup \{z\}$ und $E' := E \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\}$, wobei z ein “neuer” Knoten ist, der nicht zu V gehört.

Offensichtlich hat jeder Knoten in G' geraden Grad. Außerdem ist G' zusammenhängend (da G zusammenhängend ist). Aus (a) folgt, dass G' einen Euler-Kreis besitzt. Wegen $\text{Grad}_{G'}(z) = 2$ wird z auf diesem Kreis genau einmal besucht. Durch Entfernen der Kanten $\{x, z\}$ und $\{z, y\}$ erhält man einen Euler-Weg in G , der die beiden Knoten x und y als Anfangs- und Endpunkt hat. \square

Folie 162

Lösung des Königsberger Brückenproblems

Beispiel 3.21.

Mit Hilfe von Satz 3.20 können wir das Königsberger Brückenproblem aus Beispiel 3.18 leicht lösen: Es gibt *keinen* Spaziergang, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

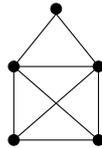
Beweis: Ein solcher Spaziergang würde gerade einem Euler-Kreis im Graphen $G_{\text{Königsberg}}$ entsprechen. Dieser Graph besitzt aber 4 Knoten von ungeradem Grad und kann daher laut Satz 3.20(a) keinen Euler-Kreis besitzen. \square

Folie 163

Beispiel 3.22.

Unter Verwendung von Satz 3.20 kann man auch die folgende Frage leicht lösen.

Frage: Kann man die Figur



in einem Zug nachzeichnen? D.h: Besitzt dieser Graph einen Euler-Weg?

Unter Verwendung von Satz 3.20 kann man die Frage leicht beantworten, indem man nachzählt, wie viele Knoten von ungeradem Grad es gibt. Im obigen Graphen gibt es genau 2 Knoten von ungeradem Grad. Gemäß Satz 3.20 besitzt G also einen Euler-Weg, der kein Euler-Kreis ist.

Ähnlichkeit zweier Graphen

Folie 164

Teilgraphen und induzierte Teilgraphen

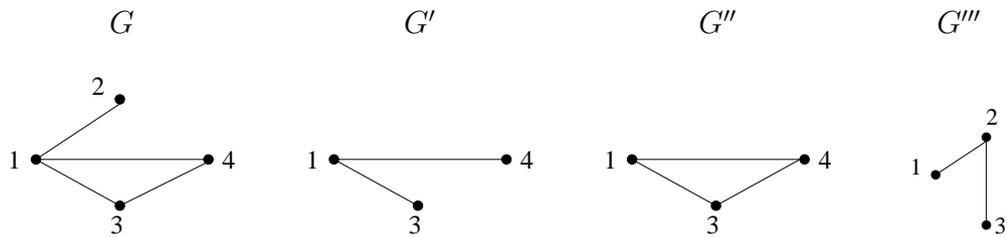
Die folgende Definition formalisiert, wann ein Graph G' in einem Graphen G „enthalten“ ist.

Definition 3.23.

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei (gerichtete oder ungerichtete) Graphen.

- (a) G' heißt *Teilgraph von G* , falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- (b) Sei $W \subseteq V$. Der *von W induzierte Teilgraph von G* ist der Graph $G|_W$ mit Knotenmenge W und Kantenmenge $E|_W := \{e \in E : \text{alle mit } e \text{ inzidenten Knoten liegen in } W\}$.
- (c) $G' = (V', E')$ heißt *induzierter Teilgraph von G* , falls $V' \subseteq V$ und $E' = \{e \in E : \text{alle mit } e \text{ inzidenten Knoten liegen in } V'\}$ (d.h.: $V' \subseteq V$ und G' ist genau der von V' induzierte Teilgraph von G).

Beispiel. Wir betrachten die folgenden Graphen:



Dann ist

- G' ein Teilgraph von G , aber kein induzierter Teilgraph von G .
- G'' ein induzierter Teilgraph von G .
- G''' kein Teilgraph von G .

Folie 165

Gleichheit von Graphen

Definition 3.24.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ sind *gleich* (kurz: $G = G'$), falls sie dieselbe Knotenmenge und dieselbe Kantenmenge besitzen. D.h.:

$$G = G' \quad : \iff \quad V = V' \quad \text{und} \quad E = E'.$$

Beispielsweise sind die beiden Graphen



nicht gleich, da sie unterschiedliche Knotenmengen besitzen. Intuitiv sind die beiden Graphen aber „*prinzipiell gleich*“ (Fachbegriff: *isomorph*, kurz: $G \cong G'$), da der zweite Graph aus dem ersten durch Umbenennung der Knoten entsteht. Der Begriff der Isomorphie wird durch die folgende Definition präzisiert.

Folie 166

Isomorphie von Graphen

Definition 3.25.

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei (gerichtete oder ungerichtete) Graphen. G und G' heißen *isomorph* (kurz: $G \cong G'$, in Worten: G ist isomorph zu G'), falls es eine bijektive Abbildung $f : V \rightarrow V'$ gibt, so dass für alle Knoten $i \in V$ und $j \in V$ gilt:

- falls G und G' gerichtet sind:

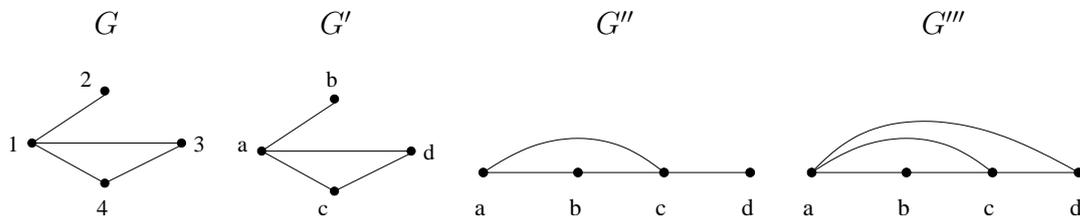
$$(i, j) \in E \iff (f(i), f(j)) \in E'$$

- falls G und G' ungerichtet sind:

$$\{i, j\} \in E \iff \{f(i), f(j)\} \in E'.$$

Eine solche Abbildung f wird *Isomorphismus von G nach G'* genannt.

Beispiel. Es seien:



Dann gilt:

- $G \cong G'$ via $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ mit $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = d$, $f(4) = c$.

Ein weiterer Isomorphismus von G nach G' ist die Abbildung $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ mit $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = c$, $g(4) = d$.

- $G \cong G''$ via $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ mit $f(1) = c$, $f(2) = d$, $f(3) = a$, $f(4) = b$.

Ein weiterer Isomorphismus von G nach G'' ist die Abbildung $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ mit $g(1) = c$, $g(2) = d$, $g(3) = b$, $g(4) = a$.

- G'' ist nicht isomorph zu G''' , kurz: $G'' \not\cong G'''$, da G''' *mehr* Kanten als G'' hat.

Markierte Graphen

Folie 167

Bemerkung 3.26.

Viele Modellierungsaufgaben erfordern, dass den Knoten oder den Kanten eines Graphen weitere Informationen zugeordnet werden. Dies wird durch so genannte *Markierungsfunktionen* für Knoten oder Kanten formalisiert:

- (a) Eine *Knotenmarkierung* eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung

$$m: V \rightarrow W,$$

wobei W ein geeigneter Wertebereich ist. In dem Graph aus Beispiel 3.1(a) könnte man beispielweise eine Knotenmarkierung *Einwohnerzahl*: $V \rightarrow \mathbb{N}$ einführen, die jedem Knoten die Einwohnerzahl der zugehörigen Stadt zuordnet.

- (b) Eine *Kantenmarkierung* von G ist eine Abbildung

$$m: E \rightarrow W,$$

wobei W ein geeigneter Wertebereich ist. In dem Graph aus Beispiel 3.1(a) könnte man beispielweise eine Kantenmarkierung *Entfernung*: $E \rightarrow \mathbb{N}$ einführen, die jeder Kante die Länge (in km) des von der Kante repräsentierten Autobahnteilstücks zuordnet.

Folie 168

Multigraphen

Kantenmarkierungen kann man auch dazu verwenden, um auszudrücken, dass es zwischen zwei Knoten mehr als eine Kante gibt. Die Markierungsfunktion gibt dann an, für wie viele Verbindungen die eine Kante des Graphen steht:

Definition 3.27.

Ein *Multigraph* (G, m) besteht aus einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ und einer Kantenmarkierung $m: E \rightarrow \mathbb{N}$.

Beispiel. Sei $G = (V, E)$ der Graph mit $V = \{a, b, c\}$ und $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$. Sei $m: E \rightarrow \mathbb{N}$ mit $m(\{a, b\}) = 1$, $m(\{b, c\}) = 1$ und $m(\{c, a\}) = 2$. Dann ist (G, m) ein Multigraph, der graphisch wie folgt dargestellt werden kann:



Zuordnungsprobleme

Wir betrachten zunächst zwei typische Beispiele von Zuordnungsproblemen.

Folie 169

Beispiel 3.28.

- (a) In einem Tennisverein sollen die Vereinsmitglieder für ein Turnier zu Doppelpaarungen zusammengestellt werden. Dabei möchte man jeweils nur befreundete Personen als ‘Doppel’ zusammen spielen lassen.

Um diese Aufgabe zu lösen, modellieren wir die Situation durch den ungerichteten Graphen $G_T := (V_T, E_T)$ mit

$$V_T := \{x : x \text{ ist ein Vereinsmitglied}\}$$

$$E_T := \{\{x, y\} : x \text{ und } y \text{ sind befreundete Vereinsmitglieder}\}.$$

Das *Ziel* ist, eine größtmögliche Anzahl von Doppelpaarungen zu finden. D.h.: Wir wollen eine möglichst große Menge $E' \subseteq E_T$ finden, so dass kein Vereinsmitglied Endpunkt von mehr als einer Kante aus E' ist.

Folie 170

- (b) Eine Gruppe unterschiedlich ausgebildeter Piloten soll so auf Flugzeuge verteilt werden, dass jeder das ihm zugeteilte Flugzeug fliegen kann.

Auch hier modellieren wir die Situation durch einen ungerichteten Graphen $G_F := (V_F, E_F)$ mit

$$V_F := \{x : x \text{ ist ein Pilot}\} \cup \{y : y \text{ ist ein Flugzeug}\},$$

$$E_F := \{\{x, y\} : \text{Pilot } x \text{ kann Flugzeug } y \text{ fliegen}\}.$$

Das *Ziel* ist, einen Flugplan aufzustellen, so dass jeder Pilot das ihm zugeteilte Flugzeug fliegen kann. D.h.: Wir wollen eine möglichst große Menge $E' \subseteq E_F$ finden, so dass kein Element aus V_F Endpunkt von mehr als einer Kante in E' ist.

Die gesuchten Kantenmengen E' aus (a) und (b) werden *Matching* genannt:

Folie 171

Matchings

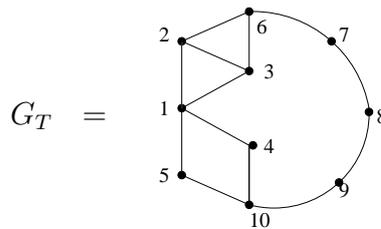
Definition 3.29.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Kantenmenge $E' \subseteq E$ heißt *Matching* (bzw. *Paarung* bzw. *Menge unabhängiger Kanten*), falls kein Knoten aus V Endpunkt von mehr als einer Kante aus E' ist.

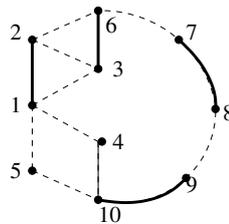
Ziel in Beispiel 3.28 (a) und (b) ist es, ein Matching maximaler Größe zu finden, d.h. ein Matching, das so viele Kanten wie möglich enthält.

Folie 172

Beispiel 3.30. In einem Tennisverein mit 10 Mitgliedern und „Freundschaftsgraph“

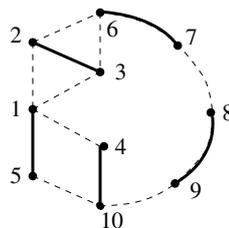


sind z.B. die folgenden beiden Kantenmengen Matchings:



$$E' = \{ \{1, 2\}, \{3, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\} \}$$

und



$$E'' = \{ \{1, 5\}, \{4, 10\}, \{8, 9\}, \{6, 7\}, \{2, 3\} \}.$$

In Beispiel 3.28(b) sollten Piloten auf Flugzeuge verteilt werden. Die Knotenmenge des zugehörigen Graphen G_F bestand aus zwei verschiedenen Arten von Objekten (nämlich einerseits Piloten und andererseits Flugzeuge), und Kanten konnten jeweils nur zwischen Objekten unterschiedlicher Art verlaufen (also zwischen Piloten und Flugzeugen, nicht aber zwischen Piloten und Piloten bzw. Flugzeugen und Flugzeugen). Solche Graphen werden *bipartite Graphen* genannt:

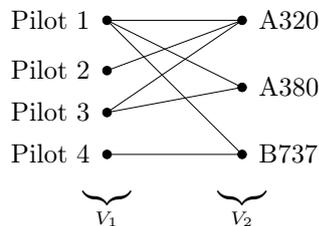
Bipartite Graphen

Definition 3.31.

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn seine Knotenmenge V so in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 zerlegt werden kann (d.h. $V = V_1 \dot{\cup} V_2$), dass jede Kante aus E einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat.

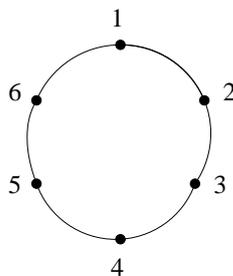
Beispiel 3.32.

(a) Der Graph

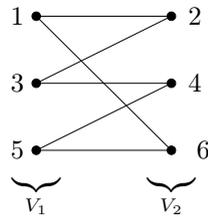


ist bipartit mit $V_1 = \{\text{Pilot 1, Pilot 2, Pilot 3, Pilot 4}\}$ und $V_2 = \{\text{A320, A380, B737}\}$.

(b) Der Graph

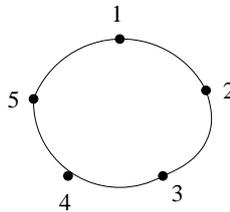


ist bipartit mit $V_1 = \{1, 3, 5\}$ und $V_2 = \{2, 4, 6\}$. Der Graph lässt sich auch wie folgt graphisch darstellen:



Folie 176

(c) Der Graph



ist *nicht* bipartit.

Beweis: Durch Widerspruch. Angenommen, er ist doch bipartit. Dann seien V_1 und V_2 die beiden disjunkten Teilmengen der Knotenmenge, so dass jede Kante des Graphen einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $1 \in V_1$ ist (falls nicht, vertauschen wir einfach V_1 und V_2). Dann muss aber gelten: $2 \in V_2$, $3 \in V_1$, $4 \in V_2$ und $5 \in V_1$, also $V_1 = \{1, 3, 5\}$ und $V_2 = \{2, 4\}$. Im Graphen gibt es aber auch eine Kante zwischen 1 und 5, und beide Knoten gehören zu V_1 . Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass jede Kante einen Endpunkt in V_1 und einen Endpunkt in V_2 hat. \square

Allgemein gilt: Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und ist G ein Kreis auf n Knoten (wie in (b) für $n = 6$ und in (c) für $n = 5$), so gilt:

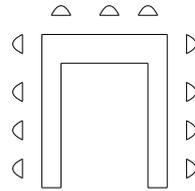
$$G \text{ ist bipartit} \iff n \text{ ist gerade.}$$

Folie 177

Wir betrachten ein weiteres typisches Beispiel für ein Zuordnungsproblem:

Beispiel 3.33 (Sitzordnung bei einer Familienfeier).

Die Gäste einer Familienfeier sollen so an einer hufeisenförmigen Tafel



platziert werden, dass niemand neben jemanden sitzt, den er nicht leiden kann.

Lösungsansatz:

Schritt 1: Stelle den *Konfliktgraphen* $G = (V, E)$ auf, wobei

$$V := \{x : \text{Person } x \text{ soll zur Feier kommen}\} \text{ und}$$

$$E := \left\{ \begin{array}{l} \text{Person } x \text{ kann Person } y \text{ nicht leiden} \\ \{x, y\} : \text{ oder} \\ \text{Person } y \text{ kann Person } x \text{ nicht leiden} \end{array} \right\}$$

d.h. Kanten im Konfliktgraphen zeigen auf, wer im Konflikt mit wem steht.

Folie 178

Schritt 2: Bilde das *Komplement des Konfliktgraphen*, d.h. betrachte den Graphen $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ mit

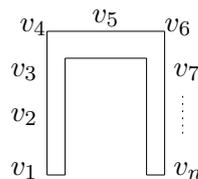
$$\tilde{V} := V \text{ und}$$

$$\tilde{E} := \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y, \{x, y\} \notin E\},$$

d.h. Kanten in \tilde{G} zeigen an, wer prinzipiell neben wem platziert werden könnte.

Schritt 3: Suche einen Hamilton-Weg in \tilde{G} .

Wenn (v_1, \dots, v_n) (mit $n = |\tilde{V}|$) ein Hamilton-Weg in \tilde{G} ist, dann kann man die Sitzordnung folgendermaßen festlegen:



Falls es in \tilde{G} keinen Hamilton-Weg gibt, so weiß man, dass es *keine Möglichkeit gibt*, die geladenen Gäste so an einer hufeisenförmigen Tafel zu platzieren, dass niemand neben jemandem sitzt, den er nicht leiden kann.

Folie 179

Ein möglicher Ausweg ist, die Gäste an *mehrere* Tische zu verteilen. Dies kann wie folgt modelliert werden:

Beispiel 3.34 (Sitzordnung bei einer Familienfeier, Teil 2).

Die Gäste einer Familienfeier sollen so an mehreren Tischen platziert werden, dass Personen, die sich nicht leiden können, an verschiedenen Tischen sitzen. Dabei sollen so wenig Tische wie möglich verwendet werden. Diese Aufgabe kann folgendermaßen modelliert werden: Die verfügbaren Tische werden mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots$ durchnummeriert. Die geladenen Gäste und die herrschenden Konflikte zwischen Gästen werden durch den in Beispiel 3.33 betrachteten Konfliktgraphen $G = (V, E)$ repräsentiert. Die Zuordnung, wer an welchem Tisch sitzen soll, wird durch eine Knotenmarkierung $m: V \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ repräsentiert, wobei $m(x) = i$ bedeutet, dass Person x am Tisch i sitzen soll.

Das Ziel ist, eine *konfliktfreie Knotenmarkierung* $m: V \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ zu finden. Dabei soll $|\text{Bild}(m)|$ möglichst klein sein — dies entspricht dem Ziel, die Gäste an möglichst wenige Tische zu verteilen.

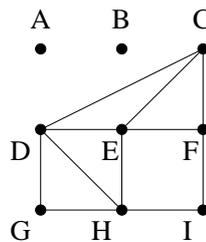
Folie 180

Konfliktfreie Knotenmarkierungen

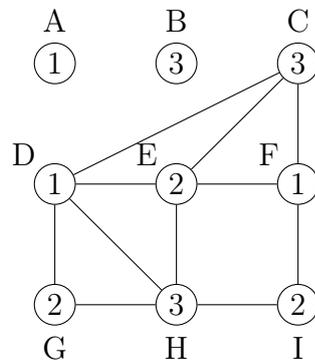
Definition 3.35.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Funktion $m: V \rightarrow \mathbb{N}$ heißt *konfliktfreie Knotenmarkierung* (bzw. *konfliktfreie Färbung*), wenn für jede Kante $\{x, y\} \in E$ gilt: $m(x) \neq m(y)$.

Beispiel 3.36. Um Beispiel 3.34 fortzuführen, betrachten wir eine Familienfeier mit Gästen A, B, C, D, E, F, G, H, I und folgendem Konfliktgraphen:

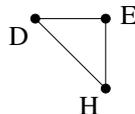


Die folgende Graphik gibt eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m: V \rightarrow \mathbb{N}$ an, wobei für jeden Knoten $v \in V$ der Wert $m(v)$ in den Kreis geschrieben ist, der den Knoten v repräsentiert.



Folie 181

Für die hier gegebene Markierung m gilt $|\text{Bild}(m)| = 3$, die Gäste werden also an 3 Tische verteilt. Dies ist optimal, da der Konfliktgraph ein Dreieck, z.B.



als Teilgraph enthält — deshalb muss für jede konfliktfreie Knotenmarkierung m' gelten: $|\text{Bild}(m')| \geq 3$.

Folie 182

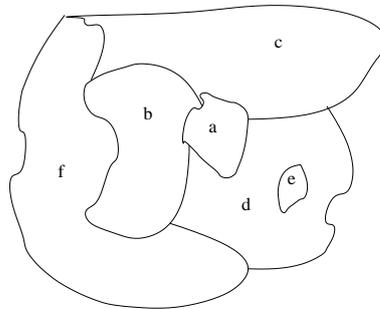
Bemerkung 3.37 (4-Farben-Problem).

Ein sehr bekannter Vertreter dieser Art von Markierungs- oder Färbungsaufgaben ist das so genannte *4-Farben-Problem*. Dabei handelt es sich um die Frage, wie viele verschiedene Farben nötig sind, um jede Landkarte so einzufärben, dass zwei Staaten, die ein Stück gemeinsamer Grenze haben, durch unterschiedliche Farben dargestellt werden. 1976 wurde bewiesen, dass vier Farben ausreichen. Der Beweis basiert auf einer Fallunterscheidung mit mehr als 1000 Fällen, die mit Hilfe eines Computerprogramms analysiert wurden.

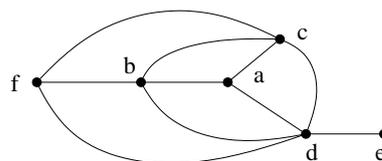
Das Problem, eine Landkarte einzufärben, kann durch einen ungerichteten Graphen modelliert werden, dessen Knoten gerade die Staaten repräsentieren, und bei dem es eine Kante zwischen zwei Staaten gibt, falls diese eine gemeinsame Grenze besitzen. Ziel ist, eine konfliktfreie Knotenmarkierung m zu finden, bei der $|\text{Bild}(m)|$ so klein wie möglich ist.

Beispiel:

Wir betrachten eine kleine Landkarte



und den zugehörigen Konfliktgraphen:



Knoten $\hat{=}$ Staaten,
 Kanten $\hat{=}$ Staaten mit gemeinsamer Grenze

Da bei den vier Knoten a, b, c, d paarweise jeder zu jedem benachbart ist, muss eine konfliktfreie Färbung diesen vier Knoten vier verschiedene Farben zuordnen — für a, b, c, d etwa *rot, gelb, grün, blau*. Da f außerdem mit b, c, d benachbart ist, muss f dann wieder *rot* gefärbt sein; e kann jede Farbe außer *blau* erhalten.

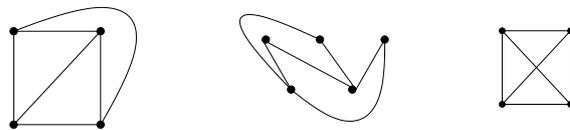
Planare Graphen

Die aus Landkarten entstehenden Konfliktgraphen haben eine besondere Eigenschaft: sie sind *planar*.

Definition 3.38.

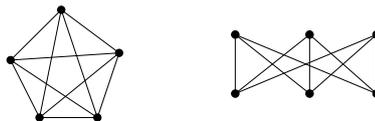
Ein Graph G heißt *planar*, wenn er so in die Ebene gezeichnet werden kann, dass seine Kanten sich nicht kreuzen.

Beispiele für planare Graphen sind:



Der dritte Graph ist planar, da er wie der erste Graph kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.

Beispiele für nicht-planare Graphen sind:



Folie 185

Die chromatische Zahl eines Graphen

Bemerkung 3.39.

Die Anzahl verschiedener “Farben” bzw. “Markierungen”, die nötig sind, um einen Graphen $G = (V, E)$ konfliktfrei zu färben (bzw. zu markieren), nennt man die *chromatische Zahl*, kurz: $\chi(G)$. Die präzise Definition ist³

$$\chi(G) := \min \left\{ |Bild(m)| : \begin{array}{l} m : V \rightarrow \mathbb{N} \text{ ist eine konfliktfreie} \\ \text{Knotenmarkierung für } G \end{array} \right\}.$$

Weitere Beispiele für Zuordnungsprobleme, die durch Graphen modelliert werden können, finden sich in den Übungsaufgaben.

3.2 Bäume

Eine für die Informatik besonders wichtige Art von Graphen sind die so genannten *Bäume*. Wir betrachten im Folgenden zunächst ungerichtete Bäume und danach gerichtete Bäume.

Ungerichtete Bäume

Definition 3.40 (ungerichteter Baum).

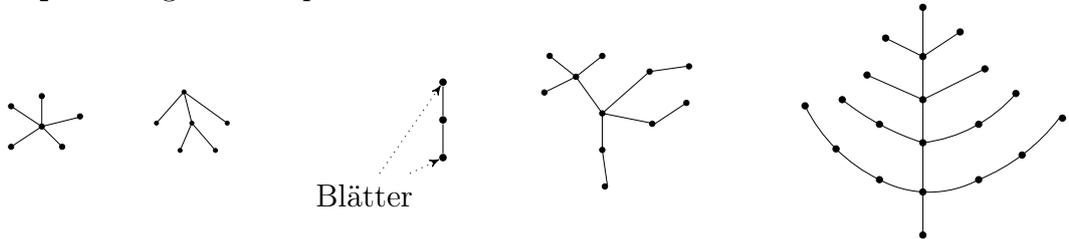
Ein *ungerichteter Baum* ist ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, der keinen einfachen Kreis enthält.

Diejenigen Knoten in V , die den Grad ≤ 1 haben, heißen *Blätter* des Baums.

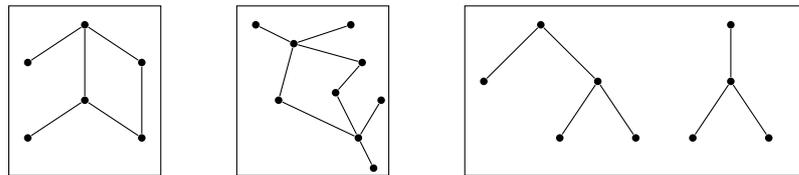
³Ist M eine endliche, nicht-leere Menge von Zahlen, so bezeichnet $\min M$ das kleinste Element von M .

Folie 186

Beispiel. Folgende Graphen sind Bäume:



Folgende Graphen sind keine Bäume:



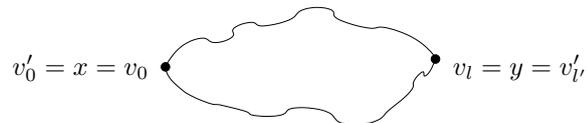
Folie 187

Beobachtung 3.41. Ist $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum, so gilt für alle Knoten $x, y \in V$:

Es gibt in B genau einen einfachen Weg von x nach y .

Denn: B ist ein ungerichteter Baum, d.h. B ist zusammenhängend und enthält keinen einfachen Kreis. Da B zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen einfachen Weg von x nach y . Angenommen, (v_0, \dots, v_ℓ) und $(v'_0, \dots, v'_{\ell'})$ sind zwei verschiedene einfache Wege von x nach y . Insbesondere gilt dann $v_0 = x = v'_0$ und $v_\ell = y = v'_{\ell'}$.

Skizze:



Dann ist aber $(v_0, \dots, v_\ell, v'_{\ell'-1}, \dots, v'_0)$ ein Kreis. Dieser Kreis enthält einen einfachen Kreis. Dann kann B aber kein Baum sein. Widerspruch. \square

Folie 188

Satz 3.42.

Jeder endliche ungerichtete Baum $B = (V, E)$ mit $V \neq \emptyset$ besitzt mindestens ein Blatt.

Beweis: Sei $B = (V, E)$ ein endlicher ungerichteter Baum mit $V \neq \emptyset$. Sei $W := (v_0, \dots, v_\ell)$ ein einfacher Weg maximaler Länge in B . Dann ist $\ell \geq 0$, da $V \neq \emptyset$. Außerdem ist $\ell < |V|$, da W einfach ist (d.h. die in W vorkommenden Knoten v_0, \dots, v_ℓ sind paarweise verschieden — und in V gibt es nur $|V|$ viele verschiedene Knoten). Wir betrachten zwei Fälle:

Fall 1: $\ell = 0$.

Da B ein Baum ist (d.h. insbesondere zusammenhängend) und $W = (v_0)$ ein einfacher Weg maximaler Länge, muss dann $V = \{v_0\}$ und $E = \emptyset$ sein. Insbesondere ist v_0 ein Blatt von B .

Fall 2: $\ell \geq 1$.

Dann ist $v_{\ell-1}$ ein Nachbar von v_ℓ . Angenommen, v_ℓ ist kein Blatt. Dann hat v_ℓ einen weiteren Nachbarn, den wir im Folgenden u nennen.

Falls u nicht in W vorkommt, so ist (v_0, \dots, v_ℓ, u) ein einfacher Weg, der länger ist als W . Dies widerspricht unserer Wahl von W als einfachem Weg maximaler Länge.

Falls u in W vorkommt, so gibt es ein i mit $u = v_i$ und $0 \leq i < \ell - 1$ (da u ein von den Knoten v_ℓ und $v_{\ell-1}$ verschiedener Knoten ist). Dann ist $(v_i, \dots, v_{\ell-1}, v_\ell, v_i)$ ein einfacher Kreis in B . Dies widerspricht aber der Tatsache, dass B ein ungerichteter Baum ist.

Insgesamt kann es also keinen von $v_{\ell-1}$ verschiedenen Nachbarn u von v_ℓ geben. D.h. v_ℓ ist ein Blatt. \square

Folie 189

Der folgende Satz, für dessen Beweis wir Satz 3.42 benutzen, besagt, dass die Anzahl der Kanten eines ungerichteten Baums durch die Anzahl der Knoten genau festgelegt ist.

Satz 3.43 (Anzahl der Kanten eines Baums).

Für jeden endlichen ungerichteten Baum $B = (V, E)$ mit $V \neq \emptyset$ gilt:

$$|E| = |V| - 1.$$

Beweis: Per Induktion nach $n := |V|$.

INDUKTIONSANFANG: $n = 1$

Der einzige ungerichtete Baum $B = (V, E)$ mit $|V| = 1$ ist der Graph \bullet mit $E = \emptyset$. Für diesen Graphen gilt: $|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1$.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \rightarrow n+1$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ beliebig.

Induktionsannahme:

Für jeden ungerichteten Baum $B' = (V', E')$ mit $V' \neq \emptyset$ und $|V'| \leq n$ gilt:
 $|E'| = |V'| - 1$.

Behauptung:

Für jeden ungerichteten Baum $B = (V, E)$ mit $V \neq \emptyset$ und $|V| = n+1$ gilt:
 $|E| = |V| - 1$.

Beweis: Sei $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum mit $|V| = n+1$. Gemäß Satz 3.42 besitzt B (mindestens) ein Blatt, das wir im Folgenden u nennen. Da B zusammenhängend ist und $|V| = n+1 \geq 2$ ist, besitzt u einen Nachbarn v in B — und da u ein Blatt ist, ist v der einzige Nachbar von u in B .

Sei nun B' der Graph, der aus B entsteht, indem wir den Knoten u und die von v zu u führende Kante löschen. D.h., $B' = (V', E')$ mit $V' := V \setminus \{u\}$ und $E' := E \setminus \{\{v, u\}\}$. Man sieht leicht, dass B' zusammenhängend ist und keinen einfachen Kreis enthält. D.h., B' ist ein Baum. Außerdem ist $|V'| = n$. Aus der Induktionsannahme folgt daher, dass $|E'| = |V'| - 1$ ist. Insgesamt gilt daher für den Baum B :

$$|E| = |E'| + 1 = (|V'| - 1) + 1 = |V'| = |V| - 1.$$

□

Folie 190

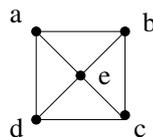
Spannbäume

Bäume finden sich als Teilgraphen von zusammenhängenden Graphen. Besonders wichtig für die Informatik sind die so genannten *Spannbäume*.

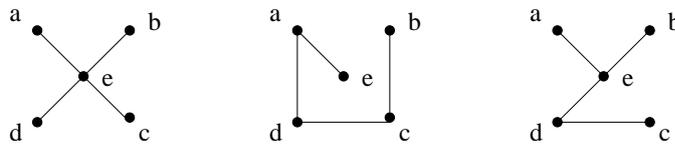
Definition 3.44.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Spannbaum von G* , falls G' ein ungerichteter Baum mit $V' = V$ und $E' \subseteq E$ ist.

Beispiel 3.45. Der Graph



hat u.a. folgende Spannbäume:



Folie 191

Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen Spannbaum. Es gilt:

Satz 3.46. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dessen Knotenmenge endlich ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Es gibt (mindestens) einen Spannbaum von } G \\ & \iff \\ & G \text{ ist zusammenhängend.} \end{aligned}$$

Beweis: “ \implies ”: klar. “ \impliedby ”: Übungsaufgabe. □

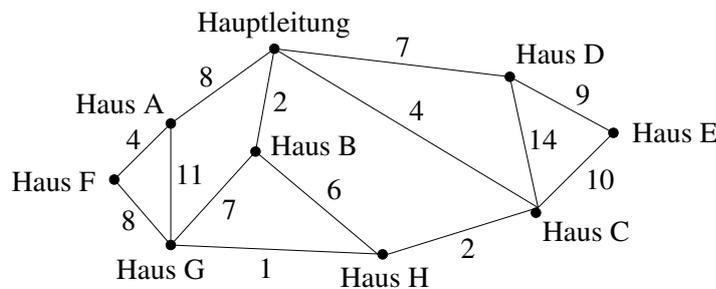
Folie 192

Geht man von einem zusammenhängenden Graphen zu einem seiner Spannbäume über, so verkleinert man gemäß Satz 3.43 die Kantenmenge von $|E|$ auf $|V| - 1$ Kanten, ohne dabei den Zusammenhang des Graphen aufzugeben. Mit dem Begriff des Spannbauums wird also ein „bezüglich der Kantenzahl kostengünstigerer Zusammenhang“ modelliert.

Manche konkreten Probleme lassen sich durch Graphen modellieren, deren Kanten mit bestimmten Werten markiert sind, so dass zur Lösung des Problems ein Spannbaum gesucht wird, bei dem die Summe seiner Kantenmarkierungen so klein wie möglich ist. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

Folie 193

Beispiel 3.47 (Kabelfernsehen). Eine Firma will Leitungen zum Empfang von Kabelfernsehen in einem neuen Wohngebiet verlegen. Der folgende Graph skizziert das Wohngebiet:



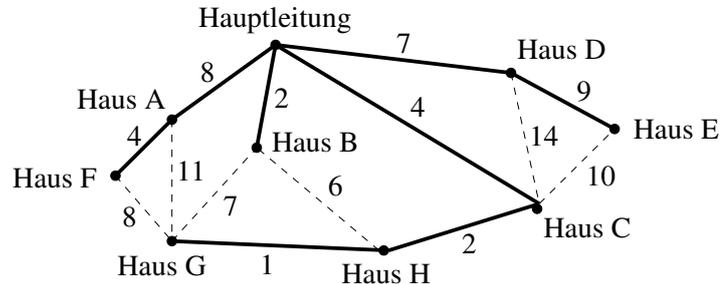
Knoten entsprechen dabei einzelnen Häusern bzw. der Hauptleitung, die aus einem bereits verkabelten Gebiet heranzuführt. Eine Kante zwischen zwei Knoten zeigt an, dass es prinzipiell möglich ist, eine direkte Leitung zwischen den beiden Häusern zu verlegen. Der Wert, mit dem die Kante markiert ist, beschreibt, wie teuer (in 1000 €) es ist, diese Leitung zu verlegen.

Folie 194

Ziel ist, Leitungen so zu verlegen, dass

- (1) jedes Haus ans Kabelfernsehen angeschlossen ist und
- (2) die Kosten für das Verlegen der Leitungen so gering wie möglich sind.

Es wird also ein Spannbaum gesucht, bei dem die Summe seiner Kantenmarkierungen so klein wie möglich ist. Ein solcher Spannbaum wird *minimaler Spannbaum* (engl.: *minimum spanning tree*) genannt. Die im Folgenden **fett** gezeichneten Kanten geben die Kanten eines minimalen Spannbaums an:



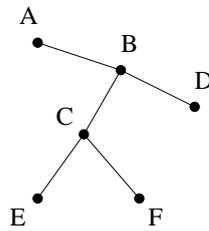
Verlegt die Firma genau diese Leitungen, so hat sie das neue Wohngebiet mit den geringstmöglichen Kosten ans Kabelfernsehen angeschlossen.

Gerichtete Bäume

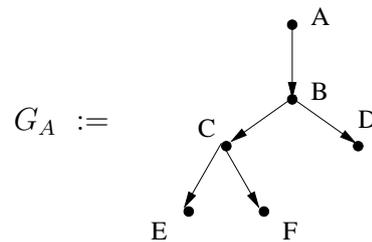
Folie 195

Einen *gerichteten Baum* erhält man, indem man in einem ungerichteten Baum einen Knoten als "Wurzel" auswählt und alle Kanten in die Richtung orientiert, die von der Wurzel weg führt.

Beispiel 3.48. Ungerichteter Baum:

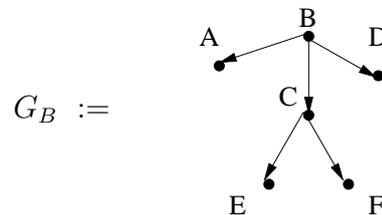


- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel A:

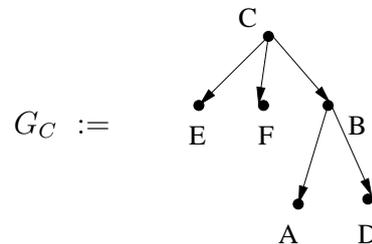


Folie 196

- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel B:



- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel C:



Die präzise Definition des Begriffs “gerichteter Baum” ist wie folgt:

Folie 197

Definition 3.49 (gerichteter Baum).

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *gerichteter Baum*, falls er folgende Eigenschaften hat:

- (1) G besitzt genau einen Knoten $w \in V$ mit $\text{Ein-Grad}_G(w) = 0$.
Dieser Knoten wird *Wurzel* genannt.
- (2) Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg von der Wurzel zum Knoten v .
- (3) Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\text{Ein-Grad}_G(v) \leq 1$.

Folie 198

Definition 3.50 (Blätter, innere Knoten, Höhe).

- (a) Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum. Diejenigen Knoten, deren Aus-Grad 0 ist, heißen *Blätter*.
Beispiel: In Beispiel 3.48 hat G_A die Blätter D, E, F. G_B hat die Blätter A, D, E, F und G_C die Blätter A, D, E, F.
- (b) Diejenigen Knoten eines gerichteten Baums, die weder Wurzel noch Blätter sind, heißen *innere Knoten*.
- (c) Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum. Die *Höhe* (bzw. *Tiefe*, engl.: height, depth) von B ist die Länge eines längsten Weges in B .
Beispiel: In Beispiel 3.48 hat G_A die Höhe 3, G_B die Höhe 2 und G_C die Höhe 2.

Folie 199

Beobachtung 3.51.

- (a) Jeder gerichtete Baum ist ein gerichteter azyklischer Graph (kurz: DAG, vgl. Definition 3.14). Aber es gibt gerichtete azyklische Graphen, die keine gerichteten Bäume sind.

Beispiel:



ist ein DAG, aber kein gerichteter Baum.

- (b) Für jeden gerichteten Baum $B = (V, E)$, dessen Knotenmenge endlich und nicht-leer ist, gilt:

$$|E| = |V| - 1.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.43, da der ungerichtete Graph, der entsteht, indem man in B die Kantenorientierung “vergisst” (d.h. jede gerichtete Kante (i, j) durch die ungerichtete Kante $\{i, j\}$ ersetzt), ein ungerichteter Baum ist.

Alternativ zu Definition 3.49 kann man die gerichteten Bäume, deren Knotenmenge endlich und nicht-leer ist, auch folgendermaßen definieren:

Definition 3.52 (gerichtete Bäume, rekursive Definition).

Die Klasse der gerichteten Bäume mit endlicher, nicht-leerer Knotenmenge ist rekursiv wie folgt definiert:

Basisregel: Ist V eine Menge mit $|V| = 1$, so ist $B := (V, \emptyset)$ ein gerichteter Baum.

Skizze: $B := \bullet$

Der (eindeutig bestimmte) Knoten in V heißt *Wurzel* von B .

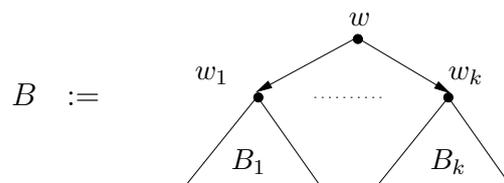
Die *Höhe* von B ist 0.

Rekursive Regel: Ist $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sind $B_1 = (V_1, E_1), \dots, B_k = (V_k, E_k)$ gerichtete Bäume mit paarweise disjunkten Knotenmengen⁴, sind $w_1 \in V_1, \dots, w_k \in V_k$ die Wurzeln von B_1, \dots, B_k , und ist w ein Element, das nicht in $V_1 \cup \dots \cup V_k$ liegt, dann ist der Graph $B = (V, E)$ mit

$$V := \{w\} \cup V_1 \cup \dots \cup V_k \quad \text{und} \quad E := E_1 \cup \dots \cup E_k \cup \{(w, w_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$$

ein gerichteter Baum.

Skizze:



⁴d.h. $V_i \cap V_j = \emptyset$ f.a. $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$

Der Knoten w heißt *Wurzel* von B .

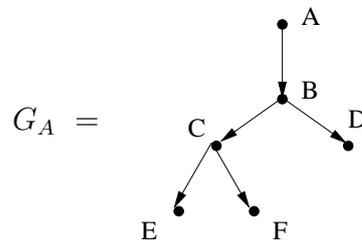
Die *Höhe* von B ist $1 + \max\{h_1, \dots, h_k\}$, wobei $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{N}$ die Höhen der gerichteten Bäume B_1, \dots, B_k sind.

Folie 203

Notation 3.53 (Kinder eines Knotens).

Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum und sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten in B . Die Knoten $v' \in V$, zu denen von v aus eine Kante führt (d.h. $(v, v') \in E$), heißen *Kinder* von v .

Beispiel. Im Graphen



aus Beispiel 3.48 gilt: Knoten A hat genau ein Kind, nämlich B; Knoten B hat genau zwei Kinder, nämlich C und D; Knoten C hat genau zwei Kinder, nämlich E und F; und die Knoten D, E, F haben keine Kinder.

Folie 204

Eine besondere Rolle bei der Modellierung spielen Bäume, bei denen jeder Knoten höchstens zwei Kinder hat.

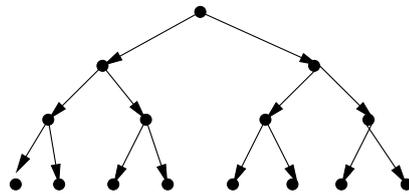
Definition 3.54 (Binärbaum, vollständiger Binärbaum).

- (a) Ein gerichteter Baum $B = (V, E)$ heißt *Binärbaum*, falls für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\text{Aus-Grad}_B(v) \leq 2$.
- (b) Ein Binärbaum $B = (V, E)$ heißt *vollständiger Binärbaum*, falls gilt:
 - (1) Jeder Knoten, der kein Blatt ist, hat Aus-Grad 2, und
 - (2) es gibt eine Zahl $h \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Blatt $v \in V$ gilt: Der Weg von der Wurzel zum Blatt v hat die Länge h .

Beispiel 3.55. Der Graph G_A aus Beispiel 3.48 ist ein Binärbaum, aber kein vollständiger Binärbaum. Der Graph G_B aus Beispiel 3.48 ist kein Binärbaum.

Folie 205

Der folgende Graph B_3 ist ein *vollständiger Binärbaum* der Höhe 3:



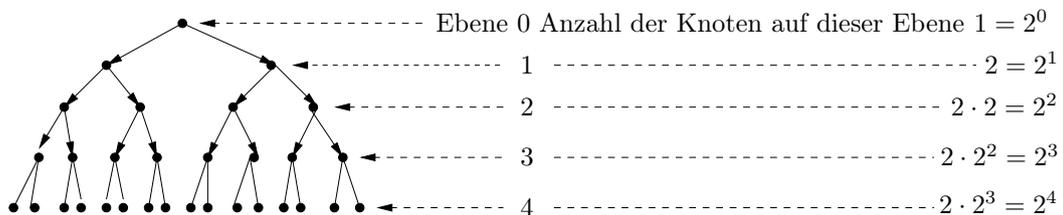
Zwischen der Höhe, der Anzahl der Blätter und der Anzahl der Knoten eines Binärbaums besteht der folgende wichtige Zusammenhang:

Satz 3.56. Sei $h \in \mathbb{N}$.

- (a) Jeder vollständige Binärbaum der Höhe h hat genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1} - 1$ Knoten.
- (b) Jeder Binärbaum der Höhe h hat höchstens 2^h Blätter und höchstens $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Beweis:

(a) *Skizze:*



Anhand dieser Skizze sieht man leicht, dass ein vollständiger Binärbaum der Höhe h genau 2^h Blätter und

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h \stackrel{\text{Satz 2.52}}{=} 2^{h+1} - 1$$

Knoten besitzt.

Den formalen Beweis führen wir per Induktion nach h :

INDUKTIONSANFANG: $h = 0$:

Für jeden gerichteten Baum $B = (V, E)$ der Höhe 0 gilt: $|V| = 1$ und $|E| = 0$. D.h. B besteht aus genau einem Knoten, der gleichzeitig

Wurzel und (einziges) Blatt des Baums ist. D.h: B hat genau $1 = 2^0 = 2^h$ Blätter und genau $1 = 2 - 1 = 2^1 - 1 = 2^{h+1} - 1$ Knoten.

INDUKTIONSSCHRITT: $h \rightarrow h + 1$:

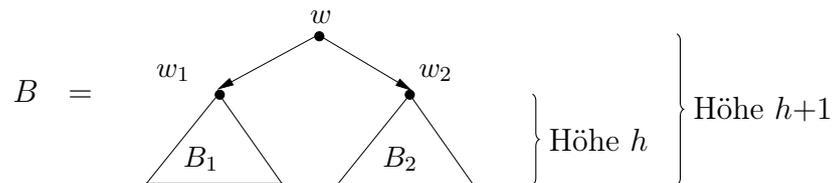
Sei $h \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Jeder vollständige Binärbaum der Höhe h hat genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Behauptung: Jeder vollständige Binärbaum der Höhe $h+1$ hat genau 2^{h+1} Blätter und genau $2^{h+2} - 1$ Knoten.

Beweis: Sei $B = (V, E)$ ein vollständiger Binärbaum der Höhe $h+1$, und sei $w \in V$ die Wurzel von B . Wegen $h+1 \geq 1$ hat w genau 2 Kinder. Seien $w_1 \in V$ und $w_2 \in V$ diese beiden Kinder von w . Für $i \in \{1, 2\}$ sei V_i die Menge aller Knoten aus V , zu denen von w_i aus ein Weg führt; und sei $B_i := (V_i, E_i)$ der induzierte Teilgraph von B mit Knotenmenge V_i .

Skizze:



Offensichtlich ist sowohl B_1 als auch B_2 ein vollständiger Binärbaum der Höhe h . Gemäß Induktionsannahme hat jeder der beiden Bäume B_1 und B_2 genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Der Baum B hat daher genau $2^h + 2^h = 2^{h+1}$ Blätter und genau $1 + (2^{h+1} - 1) + (2^{h+1} - 1) = 2 \cdot 2^{h+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$ Knoten.

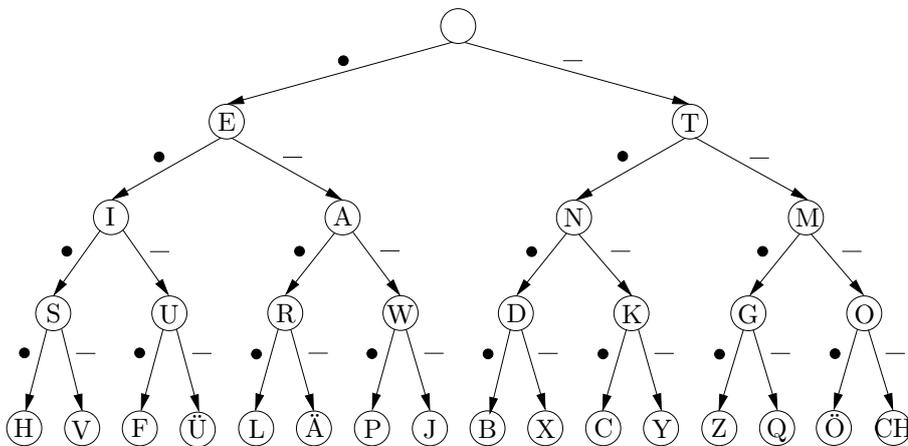
(b) Analog. Details: Übungsaufgabe.

□

Modellierungsbeispiele

Gerichtete Bäume mit Knoten- oder Kantenmarkierungen können auf vielfältige Arten zur Modellierung genutzt werden.

Beispiel 3.57. Folgen von Entscheidungen können in vielen Zusammenhängen durch gerichtete markierte Bäume modelliert werden. Solche Bäume heißen *Entscheidungsbaume*. Durch einen solchen Entscheidungsbaum erhält man beispielsweise eine kompakte Darstellung des *Morse-Codes*. Im Morse-Code wird jeder Buchstabe durch eine Folge von kurzen und langen Signalen repräsentiert. Ein “kurzes Signal” wird im folgenden Baum als Kantenmarkierung “•” dargestellt; ein “langes Signal” wird als “–” dargestellt. Insgesamt wird der Morsecode durch folgenden Entscheidungsbaum repräsentiert: $M :=$



Eine eingehende Meldung aus kurzen und langen Signalen wird entschlüsselt, indem man an der Wurzel des Baums M beginnt und bei einem kurzen Signal nach links, bei einem langen nach rechts weitergeht. Eine längere Pause zeigt an, dass ein Buchstabe vollständig übermittelt ist.

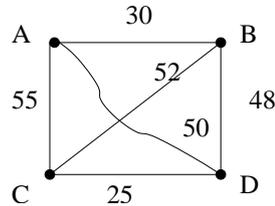
Folie 208

In jedem Entscheidungsbaum modellieren die Knoten einen Zwischenstand bei der Entscheidungsfindung. Sie können entsprechend markiert sein, z.B. mit dem codierten Buchstaben des Morse-Codes. Die Kanten, die von einem Knoten ausgehen, modellieren die Alternativen, aus denen in dem durch den Knoten repräsentierten “Zustand” eine ausgewählt werden kann. Beim Morse-Code ist das jeweils ein kurzes oder ein langes Signal, das als Kantenmarkierung angegeben wird.

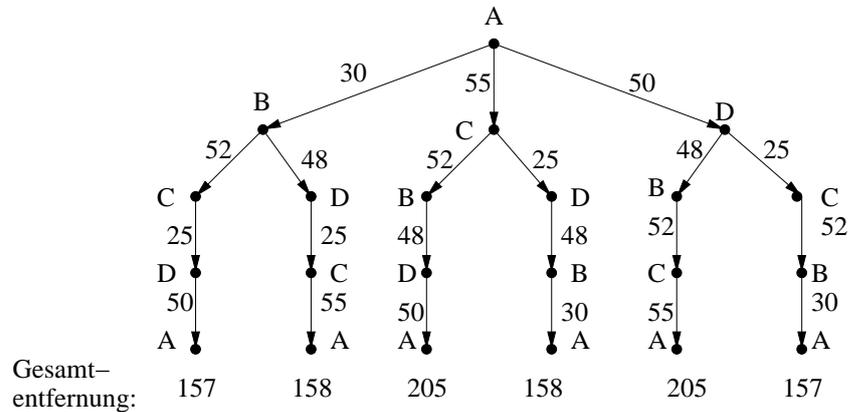
Folie 209

Beispiel 3.58. Markierte Bäume können auch genutzt werden, um den Lösungsraum kombinatorischer Probleme darzustellen. Als Beispiel betrachten wir einen Handlungsreisenden, der einen möglichst kurzen

Rundweg finden soll, auf dem er jede der Städte A, B, C, D besucht. Die Entfernungen (in km) zwischen den Städten sind als Kantenmarkierungen des folgenden Graphen gegeben:



Der folgende Baum repräsentiert alle möglichen in Stadt A startenden Rundwege:



Jeder Weg von der Wurzel zu einem Blatt repräsentiert dabei einen Rundweg, auf dem jede der Städte genau einmal besucht wird. Die Kantenmarkierungen geben die Entfernungen zwischen einzelnen Städten wieder. Eine zusätzliche Knotenmarkierung an jedem Blatt gibt die Gesamtlänge des entsprechenden Rundwegs an. Die beiden kürzesten Rundwege für unseren Handlungsreisenden sind also

$$(A, B, C, D, A) \quad \text{und} \quad (A, D, C, B, A).$$

Bemerkung 3.59. Nach dem gleichen Schema kann man auch Zugfolgen in Spielen modellieren: Jeder Knoten des Entscheidungsbaums modelliert einen Spielzustand. Die von dort ausgehenden Kanten geben an, welche Möglichkeiten für den nächsten Zug bestehen. Solche Darstellungen werden z.B. in Schachprogrammen verwendet, um die Folgen der anstehenden Entscheidung zu analysieren und zu bewerten.

Beachte. Bei der Modellierung von Spielabläufen können manche “Spielzustände” (z.B. Konfigurationen eines Schachbretts) auf unterschiedlichen Wegen (d.h. Spielverläufen) erreicht werden, und trotzdem “im Sinne des Spiels” den selben Zustand beschreiben. In solchen Fällen könnte man im Entscheidungsbaum die zugehörigen Knoten zu einem einzigen Knoten zusammenfassen. Damit geht dann allerdings die Baum-Eigenschaft verloren, und es entsteht ein allgemeiner gerichteter Graph, der auch Kreise enthalten kann. Ein Kreis entspricht dann der Situation, dass eine Folge von Spielzügen in einen Zustand zurückführt, der früher schon einmal durchlaufen wurde.

3.3 Einige spezielle Arten von Graphen

In diesem Abschnitt werden einige spezielle Arten von Graphen vorgestellt, die eine wichtige Rolle in der Informatik spielen.

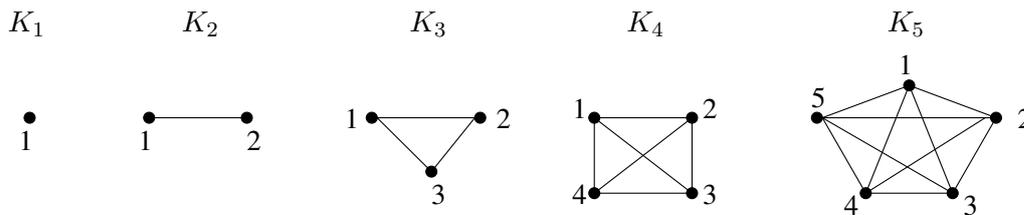
Spezielle ungerichtete Graphen

Folie 212

Definition 3.60 (Der vollständige Graph K_n).

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Der *vollständige ungerichtete Graph* K_n hat Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ und Kantenmenge $\{\{i, j\} : i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$.

Beispiele.



Beobachtung 3.61. Der Graph K_n hat n Knoten und $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ Kanten.

Folie 213

Definition 3.62 (Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$).

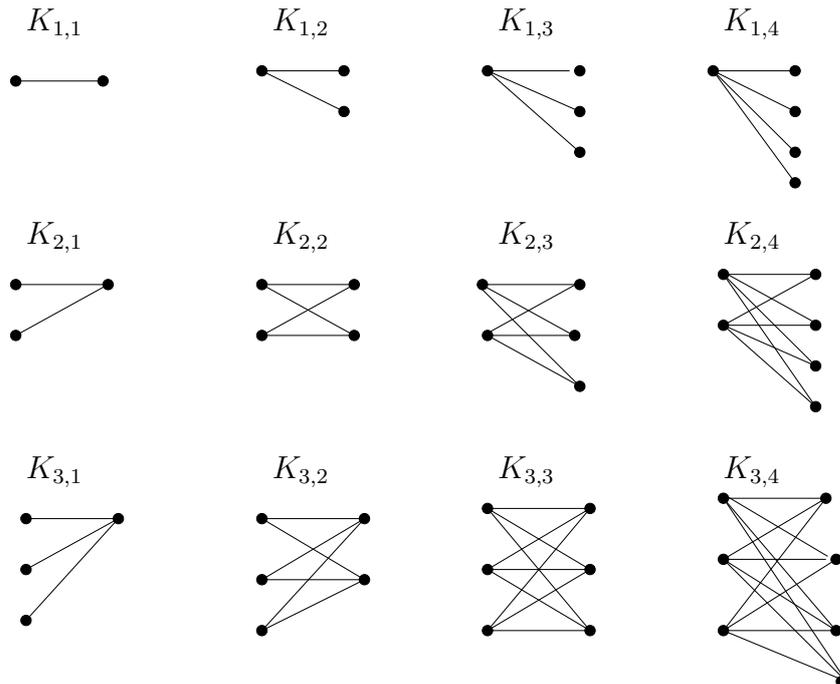
Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Der *vollständige ungerichtete bipartite Graph* $K_{m,n}$ hat Knotenmenge

$$\{(1, i) : i \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{(2, j) : j \in \{1, \dots, n\}\}$$

und Kantenmenge

$$\{ \{ (1, i), (2, j) \} : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \}.$$

Beispiele.



Beobachtung 3.63. Der Graph $K_{m,n}$ hat $m + n$ Knoten und $m \cdot n$ Kanten.

Folie 214

Notation 3.64. Ein ungerichteter Graph G mit endlicher, nicht-leerer Knotenmenge heißt

- (a) *vollständig*, falls es ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt, so dass $G \cong K_n$ (d.h. G ist isomorph zu K_n).
- (b) *vollständig bipartit*, falls es Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt, so dass $G \cong K_{m,n}$.

Spezielle gerichtete Graphen

Folie 215

Gemäß Definition 3.6 (“gerichteter Graph”) und Definition 2.26(c) (“ k -stellige Relation”) kann jeder gerichtete Graph $G = (V, E)$ als eine 2-stellige Relation über V aufgefasst werden, da die Kantenmenge E von G ja gerade eine Teilmenge von $V^2 = V \times V$ ist. Umgekehrt können wir natürlich auch jede 2-stellige Relation R über einer Menge V als gerichteten Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge R auffassen. *Gerichtete Graphen mit Knotenmenge V sind also dasselbe wie 2-stellige Relationen über einer Menge V .*

Von besonderem Interesse sind 2-stellige Relationen, die eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften besitzen:

Folie 216

Definition 3.65.

Sei E eine 2-stellige Relation über einer Menge V (d.h. $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph).

(a) E heißt *reflexiv*, falls für alle $v \in V$ gilt:

$$(v, v) \in E. \quad (\text{Skizze: } v \bullet \circlearrowleft)$$

(b) E heißt *symmetrisch*, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

$$\text{Wenn } (v, w) \in E, \text{ dann auch } (w, v) \in E.$$

(D.h.: Zu jeder Kante $v \rightarrow w$ gibt es auch eine “Rückwärtskante” $v \leftarrow w$.)

(c) E heißt *antisymmetrisch*, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

$$\text{Wenn } (v, w) \in E \text{ und } (w, v) \in E, \text{ dann } v = w.$$

(D.h.: Ist $v \neq w$, so gibt es in E allenfalls eine der beiden Kanten $v \rightarrow w$ und $v \leftarrow w$.)

Folie 217

(d) E heißt *konnex*, falls f.a. $v, w \in V$ mit $v \neq w$ gilt:

$$(v, w) \in E \quad \text{oder} \quad (w, v) \in E.$$

(d.h.: Ist $v \neq w$, so liegt mindestens eine der beiden Kanten $v \rightarrow w$ und $v \leftarrow w$ in E .)

(e) E heißt *transitiv*, falls f.a. $v, w, u \in V$ gilt:

$$\text{Ist } (v, w) \in E \text{ und } (w, u) \in E, \text{ so auch } (v, u) \in E.$$

Äquivalenzrelationen

Folie 218

Definition 3.66 (Äquivalenzrelation).

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge V ist eine 2-stellige Relation über V , die *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Beispiel 3.67. Beispiele für Äquivalenzrelationen:

(a) *Gleichheit*: Für jede Menge M ist

$$E := \{ (m, m) : m \in M \}$$

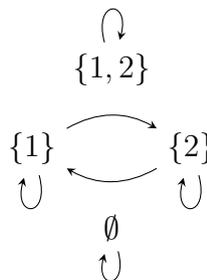
eine Äquivalenzrelation auf M . Die Aussage “ $(x, y) \in E$ ” entspricht gerade der Aussage “ $x = y$ ”.

(b) *Gleichmächtigkeit*: Für jede endliche Menge M ist

$$E := \{ (A, B) : A \subseteq M, B \subseteq M, |A| = |B| \}$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}(M)$.

Skizze für $M = \{1, 2\}$:



(c) *Gleichmächtigkeit*: Die Relation

$$E := \{ (A, B) : A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, A \text{ und } B \text{ sind gleichmächtig} \\ \text{(d.h. es gibt eine bijektive Abbildung von } A \text{ nach } B) \}$$

ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(d) *Isomorphie*: Die Relation

$$E := \{ (G, H) : G \text{ und } H \text{ sind ungerichtete Graphen mit } G \cong H \}$$

ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller ungerichteten Graphen.

Äquivalenzklassen

Bemerkung 3.68. Sei E eine Äquivalenzrelation auf einer Menge V . Für jedes $v \in V$ bezeichnet

$$[v]_E := \{ w \in V : (v, w) \in E \}$$

die *Äquivalenzklasse* von v bezüglich E . D.h.: Die Äquivalenzklasse $[v]_E$ besteht aus allen Elementen von V , die laut E "äquivalent" zu v sind. Eine Menge $W \subseteq V$ heißt *Äquivalenzklasse* (bzgl. E), falls es ein $v \in V$ mit $W = [v]_E$ gibt. Das Element v wird dann ein *Vertreter* seiner Äquivalenzklasse W genannt.

Man sieht leicht, dass für alle $v, w \in V$ gilt: Entweder $[v]_E = [w]_E$ oder $[v]_E \cap [w]_E = \emptyset$.

Falls V endlich und nicht leer ist, folgt daraus, dass es eine Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und Äquivalenzklassen W_1, \dots, W_k geben muss, so dass $V = W_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} W_k$ ist. Die Zahl k wird auch *Index* von E genannt. D.h.: Der Index einer Äquivalenzrelation gibt an, wie viele verschiedene Äquivalenzklassen es gibt.

Beispielsweise hat die Gleichmächtigkeits-Relation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M (Beispiel 3.67(b)) den Index $|M| + 1$.

Ordnungsrelationen

Folie 222

Definition 3.69 (Ordnungen).

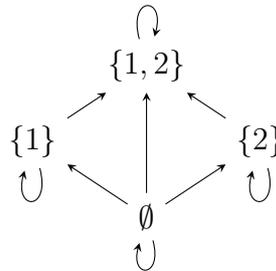
Sei E eine 2-stellige Relation über einer Menge V .

- (a) E heißt *Präordnung*, falls E *reflexiv und transitiv* ist.
- (b) E heißt *partielle Ordnung*, falls E *reflexiv, transitiv und antisymmetrisch* ist.
- (c) E heißt *lineare Ordnung* (oder *totale Ordnung*), falls E *reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und konnex* ist.

Beispiel 3.70.

- (a) \leq ist eine *lineare Ordnung* auf \mathbb{N} (und \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R}).
Ebenso ist \geq eine lineare Ordnung auf \mathbb{N} (und \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R}).
- (b) Für jede Menge M sind \subseteq und \supseteq *partielle Ordnungen* auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ (aber keine linearen Ordnungen falls $|M| \geq 2$ ist).

Skizze für " \subseteq " bei $M = \{1, 2\}$:



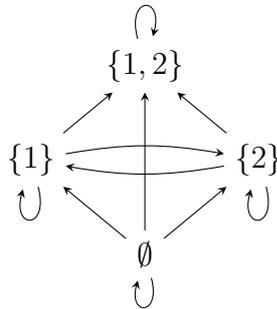
Folie 223

- (c) Für jede Menge M ist

$$E := \left\{ (A, B) : A, B \subseteq M, A \text{ ist höchstens so mächtig wie } B \right. \\ \left. \text{(d.h. es gibt eine injektive Abbildung von } A \text{ nach } B) \right\}$$

eine *Präordnung* auf $\mathcal{P}(M)$ (aber keine partielle Ordnung falls $|M| \geq 2$).

Skizze für $M = \{1, 2\}$:



Die reflexive und transitive Hülle einer Relation

Folie 224

Definition 3.71 (reflexive und transitive Hülle).

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Die *reflexive und transitive Hülle* (bzw. der *reflexive und transitive Abschluss*) von E auf V ist die rekursiv wie folgt definierte Relation $E^* \subseteq V \times V$:

Basisregeln:

- F.a. $v \in V$ ist $(v, v) \in E^*$.
- F.a. $(v, w) \in E$ ist $(v, w) \in E^*$

Rekursive Regel:

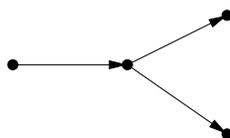
- Sind $(v, w) \in E^*$ und $(w, u) \in E^*$, so ist auch $(v, u) \in E^*$.

Das heißt: Der reflexive und transitive Abschluss von E auf V ist die kleinste Obermenge von E , die reflexiv und transitiv ist.

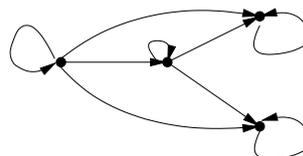
Folie 225

Beispiel.

$G = (V, E) :=$



$G^* = (V, E^*) :$



Folie 226

Beobachtung 3.72. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und seien $v, w \in V$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $(v, w) \in E^*$, wobei E^* die reflexive und transitive Hülle von E auf V ist.
 (b) Es gibt in G einen Weg von v nach w .

Beweis. Übungsaufgabe. □

3.4 Der Satz von Cantor-Bernstein-Schröder

Folie 227

Dieser Abschnitt ist dem Beweis dessen gewidmet, was wir in Bemerkung 2.65 angekündigt hatten:

Satz 3.73 (Satz von Cantor-Bernstein-Schröder).

Seien A und B beliebige Mengen. Wenn es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ und eine injektive Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt, dann gibt es auch eine bijektive Abbildung $h : A \rightarrow B$.

Beweisidee: Wir betrachten hier den Fall, dass $A \cap B = \emptyset$ ist. Es sei $G = (V, E)$ der ungerichtete Graph mit

$$\begin{aligned} V &:= A \dot{\cup} B \\ E &:= \{ \{a, f(a)\} : a \in A \} \cup \{ \{b, g(b)\} : b \in B \} \end{aligned}$$

Für jeden Knoten $v \in V$ gilt offensichtlich: $\text{Grad}_G(v) \in \{1, 2\}$ — d.h. v hat mindestens einen und höchstens zwei Nachbarn in G .

Außerdem ist G bipartit, da $A \cap B = \emptyset$ ist und jede Kante einen Endpunkt in A und einen Endpunkt in B hat. Insbesondere gilt daher: Jeder Weg in G besucht immer abwechselnd Knoten aus A und Knoten aus B .

Folie 228

Jede Zusammenhangskomponente von G ist von genau einer der folgenden Formen:

- (1) sie ist ein unendlicher Weg, der in einem Knoten $b \in B$ startet,
- (2) sie ist ein unendlicher Weg, der in einem Knoten $a \in A$ startet,
- (3) sie ist ein nach beiden Seiten unendlicher Weg,
- (4) sie ist ein Kreis.

Wir wählen die Funktion $h : A \rightarrow B$ wie folgt:

- für jedes $a \in A$, das in einer Zusammenhangskomponente vom Typ (2), (3) oder (4) liegt, setzen wir $h(a) := f(a)$.

Folie 229

- für jedes $a \in A$, das in einer Zusammenhangskomponente vom Typ (1) liegt, setzen wir $h(a) := b'$, wobei b' derjenige Knoten ist, der in dem Weg, der die Zusammenhangskomponente bildet, direkt “links” neben a liegt. Genauer: Die Zusammenhangskomponente ist von der Form

$$v_0 - w_0 - v_1 - w_1 - v_2 - w_2 - \cdots - v_i - w_i - v_{i+1} - w_{i+1} - \cdots$$

wobei gilt:

- f.a. $i \in \mathbb{N}$ ist $v_i \in B$ und $w_i \in A$,
- $v_0 \in B \setminus \text{Bild}(f)$,
- f.a. $i \in \mathbb{N}$ ist $g(v_i) = w_i$ und $f(w_i) = v_{i+1}$.

Da a in dieser Zusammenhangskomponente liegt, gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $a = w_i$ ist. Wir setzen $h(a) := v_i$ — d.h. $h(a)$ ist derjenige Knoten $b' \in B$, für den gilt: $g(b') = a$.

Man kann sich nun davon überzeugen, dass diese Funktion $h : A \rightarrow B$ bijektiv ist.

Folie 230

Formaler Beweis:

Schritt 1: Wir zeigen, dass die Aussage von Satz 3.73 für den Spezialfall gilt, dass $A \cap B = \emptyset$ ist.

Hierfür folgen wir der oben geschilderten Beweisidee. Gemäß Voraussetzung sind injektive Funktionen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow A$ gegeben.

Sei $B_0 := B \setminus \text{Bild}(f)$. Für jedes $b \in B_0$ setze $v_{b,0} := b$, und für alle $i \in \mathbb{N}$ setze $w_{b,i} := g(v_{b,i})$ und $v_{b,i+1} := f(w_{b,i})$. Per Induktion nach i erhält man: $v_{b,i} \in B$ und $w_{b,i} \in A$ f.a. $i \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1: Für alle $b, b' \in B_0$ und alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $(b, i) \neq (b', j)$ gilt: $v_{b,i} \neq v_{b',j}$ und $w_{b,i} \neq w_{b',j}$.

Beweis: Seien $b, b' \in B_0$ beliebig. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es gibt $i, j \in \mathbb{N}$ mit $(b, i) \neq (b', j)$, so dass

$v_{b,i} = v_{b',j}$ oder $w_{b,i} = w_{b',j}$. Dann wählen wir solche i, j so, dass deren Summe $i+j$ so klein wie möglich ist.⁵

Fall 1: $v_{b,i} \neq v_{b',j}$.

Gemäß unserer Wahl von i, j muss dann $w_{b,i} = w_{b',j}$ sein.

Es gilt: $w_{b,i} = g(v_{b,i})$ und $w_{b',j} = g(v_{b',j})$. Also ist $g(v_{b,i}) = g(v_{b',j})$. Da g injektiv ist, gilt $v_{b,i} = v_{b',j}$. Dies widerspricht Fall 1. Somit kann Fall 1 nicht eintreten.

Fall 2: $v_{b,i} = v_{b',j}$.

Falls $i = j = 0$, so ist $v_{b,i} = b$ und $v_{b',j} = b'$; also $b = b'$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $(b, i) \neq (b', j)$ ist.

Falls $i > 0$ und $j > 0$, so ist $v_{b,i} = f(w_{b,i-1})$ und $v_{b',j} = f(w_{b',j-1})$. Also ist $f(w_{b,i-1}) = f(w_{b',j-1})$. Da f injektiv ist, gilt $w_{b,i-1} = w_{b',j-1}$. Aber da $(i-1) + (j-1) < i+j$ ist, widerspricht dies der Minimalität von $i+j$.

Falls $i > 0$ und $j = 0$ ist, so ist $v_{b,i} = f(w_{b,i-1})$ und $v_{b',j} = b'$. Somit erhalten wir den Widerspruch, dass $v_{b,i} \in \text{Bild}(f)$ und $v_{b,i} = b' \in B_0 = B \setminus \text{Bild}(f)$ ist.

Falls $i = 0$ und $j > 0$ ist, so erhalten wir denselben Widerspruch.

Insgesamt erhalten wir, dass Fall 2 nicht eintreten kann.

Beide Fälle führen zu einem Widerspruch. Dies beendet den Beweis von Behauptung 1. □_{Beh.1}

Folie 231

Für jedes $b \in B_0$ sei $Z_b := \{v_{b,i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{w_{b,i} : i \in \mathbb{N}\}$.

Als direkte Folgerung aus Behauptung 1 erhalten wir:

Aussage A: Für alle $b, b' \in B_0$ mit $b \neq b'$ gilt: $Z_b \cap Z_{b'} = \emptyset$.

Aussage B: Für alle $b \in B_0$ und alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ gilt: $v_{b,i} \neq v_{b,j}$ und $w_{b,i} \neq w_{b,j}$.

Wir setzen $S := \bigcup_{b \in B_0} Z_b$. Wir definieren nun die Funktion $h : A \rightarrow B$:

- Für jedes $a \in A$ mit $a \notin S$ sei $h(a) := f(a)$.

⁵Diese Beweismethode wird auch „Prinzip des kleinsten Verbrechers“ genannt: Man nimmt an, es gäbe ein Gegenbeispiel. Dann nimmt man ein Gegenbeispiel, das kleinstmöglich ist (gemäß eines geeignet gewählten Größenbegriffs). Und dann zeigt man, dass es doch ein noch kleineres Gegenbeispiel geben muss. Dies ist dann ein Widerspruch, aus dem man schließt, dass kein Gegenbeispiel existiert.

- Für jedes $a \in A$ mit $a \in S$ wählen wir $h(a)$ wie folgt: Gemäß Aussage A gibt es genau ein $b \in B_0$ s.d. $a \in Z_b$. Gemäß Aussage B gibt es genau ein $i \in \mathbb{N}$ s.d. $a = w_{b,i}$.

Wir setzen $h(a) := v_{b,i}$. (Beachte, dass $g(v_{b,i}) = a$ ist.)

Folie 232

Behauptung 2: h ist surjektiv.

Beweis: Betrachte ein beliebiges $b \in B$. Wir müssen ein $a \in A$ finden, so dass $h(a) = b$ ist.

Fall 1: $b \in S$.

Gemäß Aussage A gibt es genau ein $b' \in B_0$ s.d. $b \in Z_{b'}$.

Gemäß Aussage B gibt es genau ein $i \in \mathbb{N}$ s.d. $b = v_{b',i}$.

Sei $a := w_{b',i}$. Dann ist $a \in A \cap S$, und gemäß unserer Definition der Funktion h ist $h(a) = v_{b',i} = b$.

Fall 2: $b \notin S$

Wegen $B_0 \subseteq S$ gilt insbesondere: $b \notin B_0 = B \setminus \text{Bild}(f)$. Somit ist $b \in \text{Bild}(f)$, d.h. es gibt ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

Falls $a \notin S$, so gilt gemäß unserer Definition der Funktion h , dass $h(a) = b$.

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch zeigen, dass tatsächlich $a \notin S$ gilt. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, $a \in S$. Dann gibt es ein $b' \in B_0$ und ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $a = w_{b',i}$. Aber dann ist $b = f(a) = f(w_{b',i}) = v_{b',i+1} \in Z_{b'} \subseteq S$. D.h. $b \in S$. Dies steht im Widerspruch zu Fall 2. Insgesamt ist der Beweis von Behauptung 2 beendet. $\square_{Beh.2}$

Behauptung 3: h ist injektiv.

Beweis: Betrachte beliebige $a, a' \in A$ mit $h(a) = h(a')$. Wir müssen zeigen, dass $a = a'$ ist.

Fall 1: $a, a' \notin S$.

Gemäß unserer Definition der Funktion h ist dann $h(a) = f(a)$ und $h(a') = f(a')$. Aus $h(a) = h(a')$ folgt: $f(a) = f(a')$. Da f injektiv ist, ist $a = a'$.

Fall 2: $a, a' \in S$.

Dann gibt es $b, b' \in B_0$ und $i, j \in \mathbb{N}$ so dass $a = w_{b,i}$ und $a' = w_{b',j}$.

Gemäß unserer Definition der Funktion h ist $h(a) = v_{b,i}$ und $h(a') = v_{b',j}$.

Aus $h(a) = h(a')$ folgt: $v_{b,i} = v_{b',j}$. Behauptung 1 liefert, dass $(b, i) = (b', j)$ ist. Daraus folgt: $a = w_{b,i} = w_{b',j} = a'$.

Fall 3: $a \in S$ und $a' \notin S$.

Wegen $a \in S$ gibt es ein $b \in B_0$ und ein $i \in \mathbb{N}$ s.d. $a = w_{b,i}$.
 Gemäß unserer Definition der Funktion h gilt: $h(a) = v_{b,i}$ und $h(a') = f(a')$.
 Wegen $h(a) = h(a')$ gilt: $v_{b,i} = f(a')$. Insbesondere ist $v_{b,i} \in \text{Bild}(f)$. Daher
 ist $i \neq 0$, da $v_{b,0} = b \in B_0 = B \setminus \text{Bild}(f)$ ist.
 Wegen $i \geq 1$ ist $v_{b,i} = f(w_{b,i-1})$.
 Wir erhalten: $f(w_{b,i-1}) = v_{b,i} = f(a')$. Da f injektiv ist, ist $w_{b,i-1} = a'$.
 Insbesondere ist also $a' \in Z_b \subseteq S$. Dies steht im Widerspruch zu Fall 3 (da
 $a' \notin S$ ist). Somit kann Fall 3 nicht eintreten.

Fall 4: $a' \in S$ und $a \notin S$.

Dieser Fall kann analog zu Fall 3 behandelt werden (durch Vertauschen der
 Rollen von a und a').

Insgesamt erhalten wir, dass die Fälle 3 und 4 nicht eintreten können; und
 in den Fällen 1 und 2 gilt $a = a'$. Dies beendet den Beweis von
 Behauptung 3. □_{Beh.3}

Insgesamt erhalten wir, dass die Funktion $h : A \rightarrow B$ bijektiv ist. Dies
 beendet den Beweis für *Schritt 1*.

Schritt 2: Wir zeigen nun, dass die Aussage von Satz 3.73 auch für den
 Fall gilt, in dem $A \cap B \neq \emptyset$ ist.

Gemäß Voraussetzung gibt es injektive Funktionen $f : A \rightarrow B$ und
 $g : B \rightarrow A$.

Wir setzen $\hat{A} := A \times \{1\}$ und $\hat{B} := B \times \{2\}$. Dann ist $\hat{A} \cap \hat{B} = \emptyset$.

Wir definieren die Funktionen $\hat{f} : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ und $\hat{g} : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$ wie folgt: Für
 jedes $a \in A$ und jedes $b \in B$ ist $\hat{f}(a, 1) := (f(a), 2)$ und $\hat{g}(b, 2) := (g(b), 1)$.
 Da f und g injektiv sind, sind auch \hat{f} und \hat{g} injektiv.

Wegen $\hat{A} \cap \hat{B} = \emptyset$, gibt es gemäß der in *Schritt 1* bereits bewiesenen
 Aussage eine bijektive Funktion $\hat{h} : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$.

Daraus generieren wir eine Funktion $h : A \rightarrow B$ wie folgt: Für jedes $a \in A$
 betrachte $u_a := \hat{h}(a, 1)$. Klar: $u_a \in \hat{B} = B \times \{2\}$ — d.h.: es gibt ein $b \in B$
 so dass $u_a = (b, 2)$. Wir setzen $h(a) := b$.

Da \hat{h} bijektiv ist, kann man sich leicht davon überzeugen, dass auch h
 bijektiv ist. Dies beendet den Beweis von *Schritt 2*.

Insgesamt ist der formale Beweis von Satz 3.73 beendet. □_{Satz 3.73}

3.5 Literaturhinweise

Als vertiefende Lektüre sei Kapitel 1.2 in [Juk08], Kapitel 5 in [KB05],
 Kapitel 11 in [MM00], Teile der Kapitel 0–4 und 8 in [Die06], sowie Teile

der Kapitel 7–10 und 13 in [LPV03] empfohlen. Eine umfassende Einführung in die Graphentheorie gibt das Lehrbuch [Die06].

Quellennachweis: Kapitel 3.1–3.3 sind dem Vorlesungsskript [Sch13] entnommen; viele der in diesem Kapitel angegebenen Modellierungsbeispiele sind dem Buch [KB05] entnommen.