Kapitel 1

Einführung ins Thema

1.1 Ziele der Veranstaltung „Diskrete Strukturen“

Folie 1

Auszug aus der Studien- und Prüfungsordnung

Lern- und Qualifikationsziele dieser Veranstaltung:

> Studierende erlernen die zum fundierten Verständnis der Informatik notwendigen Grundlagen der diskreten mathematischen Strukturen.
>
> Sie erwerben die Fähigkeit, mathematische Aussagen zu verstehen und Beweise selbst zu führen, sowie Probleme präzise zu formulieren und durch Methoden der diskreten Mathematik zu lösen.

Themen und Inhalte der Veranstaltung:

- Mathematische Grundbegriffe;
  Mathematische Beweise verstehen und selbst formulieren
- Graphen und Bäume
- Algebraische Strukturen
- Kombinatorik
- Diskrete Stochastik

Folie 2

Verortung der Begriffe „diskret“ und „Struktur“

Auszug aus DUDEN Fremdwörterbuch *(6. Auflage, 1997):*

diskret 1.a) so unauffällig behandelt, ausgeführt o.Ä., dass es von anderen kaum od. gar nicht bemerkt wird; vertraulich

b) taktvoll, rücksichtsvoll; Ggs. ↑ indiskret.

2.a) (von sprachlichen Einheiten) abgegrenzt, abgetrennt, abgrenzbar, z.B. durch Substitution (Sprachw.);

b) *in einzelne Punkte zerfallend, vereinzelt, abzählbar (bezogen auf eine Folge von Ereignissen od. Symbolen; Techn.)*

Struktur 1. [unsichtbare] *Anordnung der Teile eines Ganzen zueinander, gegliederter Aufbau, innere Gliederung.*

2. Gefüge, das aus Teilen besteht, die wechselseitig voneinander abhängen.

3. (ohne Plural) erhabene Musterung bei Textilien, Tapeten o.Ä.

4. geologische Bauform (z.B. Falte, Salzstock u.a.).

Folie 3

Auszug aus dem Vorwort des Buchs [Ste07]:

> Um was aber geht es in einem Buch über diskrete Strukturen? Natürlich nicht etwa um geheime Strukturen, das Wort „diskret“ steht hier vielmehr für das Gegenteil von „analog“.
>
> Die Bedeutung der diskreten Strukturen für die Informatik ist vor allem darin begründet, dass die Arbeitsweise moderner Computer auf den binären Zuständen 0 und 1 basiert. Aber nicht nur der logische Aufbau eines Computers ist diskreter Natur, diskrete Strukturen spielen auch bei der Modellierung und Lösung von Problemen aus der Informatik eine wichtige Rolle.

1.2 Wozu „Diskrete Strukturen“ im Informatik-Studium?

Folie 4

Modellierung mittels diskreter Strukturen

In der Informatik wird das Modellieren mittels diskreter Strukturen als typische Arbeitsmethode in vielen Bereichen angewandt. Es dient der präzisen Beschreibung von Problemen durch geeignete formale Modelle und ist damit Voraussetzung für die systematische Lösung eines Problems (siehe Abbildung 1.1).

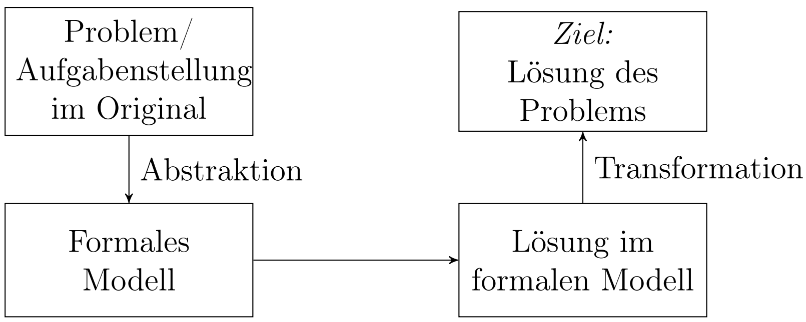


Abbildung 1.1: Generelle Vorgehensweise in der Informatik

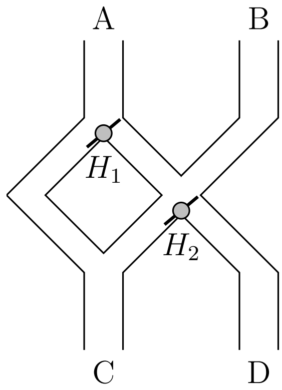
Folie 5

In den verschiedenen Gebieten der Informatik werden unterschiedliche, jeweils an die Art der Probleme und Aufgaben angepasste diskrete Modellierungsmethoden verwendet. Ziel ist jeweils, (nur) die zur Lösung des Problems *relevanten* Aspekte präzise zu beschreiben.

In der Veranstaltung „Diskrete Strukturen“ werden die Grundlagen von verschiedenen diskreten Modellierungsmethoden behandelt und anhand von anschaulichen Beispielen verdeutlicht.

Folie 6

Beispiel 1.1 (Problem “Murmeln”)**.**
Die nachfolgende Abbildung zeigt ein Spiel, in dem Murmeln bei A oder B in die Spielbahn fallen gelassen werden.



Folie 7

Je nach Stellung der Hebel H_1 und H_2 rollen die Murmeln in der Spielbahn nach links oder rechts. Sobald eine Murmel auf einen dieser Hebel trifft, wird der Hebel nach dem Passieren der Murmel umgestellt, so dass die nächste Murmel in die andere Richtung rollt. Zu Beginn ist jeder der beiden Hebel so eingestellt, dass die nächste Murmel, die auf den Hebel trifft, nach links rollt. Wenn beispielsweise nacheinander drei Murmeln fallen gelassen werden, wobei die erste und dritte Murmel bei A und die zweite Murmel bei B fallen gelassen wird, dannkommen die ersten beiden Murmeln an der Öffnung C und die letzte Murmel an der Öffnung D heraus.

Frage: Aus welcher Öffnung fällt die letzte Murmel, wenn sieben Murmeln fallen gelassen werden, wobei die erste, zweite, vierte und letzte Murmel bei A und alle anderen Murmeln bei B fallen gelassen werden?

Folie 8

Lösungsansätze:

1. Knobeln, um eine Lösung per “Geistesblitz” zu erhalten
2. Systematisches Vorgehen unter Verwendung von Informatik-Kalkülen

Hier wird der 2. Ansatz verfolgt.

Erste Analyse des Problems:

- *relevante Objekte:*
  Spielbahn, Eingänge A und B, Ausgänge C und D, Hebel H_1 und H_2, Murmeln

- *Tätigkeit:*
  Einwerfen von Murmeln an Eingängen A und/oder B

- *Start:*
  Hebel H_1 und H_2 zeigen nach links

- *Ziel:*
  Herausfinden, aus welchem Ausgang die letzte Murmel rollt, wenn nacheinander Murmeln an folgenden Eingängen eingeworfen werden:
  A, A, B, A, B, B, A

Folie 9

- *Eigenschaften/Beziehungen:*

  - Hebelpositionen: H_1 zeigt entweder nach links oder nach rechts, H_2 zeigt entweder nach links oder nach rechts.
  - Für jeden der beiden Hebel H_1 bzw. H_2 gilt: Wenn er nach links (bzw. rechts) zeigt so rollt die nächste an ihm vorbeirollende Murmel nach links (bzw. nach rechts) weiter.
  - Jeder der beiden Hebel H_1 bzw. H_2 ändert bei jedem Kontakt mit einer Murmel seine Richtung.
  - Eine bei A eingeworfene Murmel rollt zu Hebel H_1.
    Eine bei B eingeworfene Murmel rollt direkt zu Hebel H_2, ohne Hebel H_1 zu passieren.
  - Zeigt H_1 nach links, so rollt eine bei A eingeworfene Murmel direkt zu Ausgang C.
    Zeigt H_1 nach rechts, so rollt eine bei A eingeworfene Murmel zu Hebel H_2.
  - Zeigt H_2 nach links, so rollt eine diesen Hebel passierende Murmel zu Ausgang C.
    Zeigt H_2 nach rechts, so rollt eine diesen Hebel passierende Murmel zu Ausgang D.

Folie 10

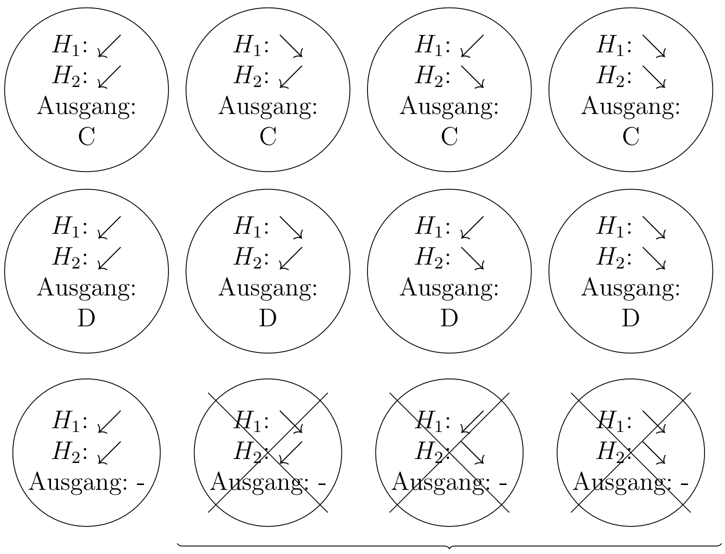
Abstraktionen:

1. Nutze Abkürzungen:

$H_1 : \swarrow$	$\widehat{=}$	Hebel H_1 zeigt nach links
$H_1 : \searrow$	$\widehat{=}$	Hebel H_1 zeigt nach rechts
$H_2 : \swarrow$	$\widehat{=}$	Hebel H_2 zeigt nach links
$H_2 : \searrow$	$\widehat{=}$	Hebel H_2 zeigt nach rechts
Ausgang: C	$\widehat{=}$	die zuvor fallen gelassene Murmel ist an Ausgang C herausgerollt
Ausgang: D	$\widehat{=}$	die zuvor fallen gelassene Murmel ist an Ausgang D herausgerollt
Ausgang: –	$\widehat{=}$	es wurde noch keine Murmel eingeworfen

Folie 11

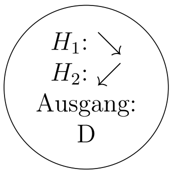
2. Betrachte die möglichen „Zustände", die auftreten dürfen:



unzulässig, da vor dem Einwurf der ersten Murmel beide Hebel nach links zeigen müssen

Folie 12

3. Formale Modellierung der "Zustände": Repräsentiere den "Zustand"



durch das Tupel (R, L, D).

Allgemein wird ein Zustand durch ein Tupel (x, y, z) repräsentiert mit $x \in \{L, R\}$, $y \in \{L, R\}$ und $z \in \{C, D, -\}$, für das folgende Bedingung erfüllt ist: *falls* $z = -$, *so ist* $x = y = L$.

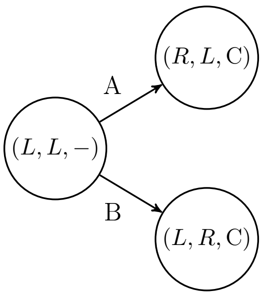
Folie 13

Übergänge von einem Zustand in einen anderen Zustand:

Vom Zustand $(L, L, -)$ aus kann man durch Einwerfen einer einzelnen Murmel in folgende Zustände gelangen:

- (R, L, C), indem die Murmel bei A eingeworfen wird,
- (L, R, C), indem die Murmel bei B eingeworfen wird.

Graphische Darstellung:



Insgesamt ergibt sich das in Abbildung 1.2 dargestellte Bild aus Zuständen und Zustandsübergängen.

Folie 14

Folie 15

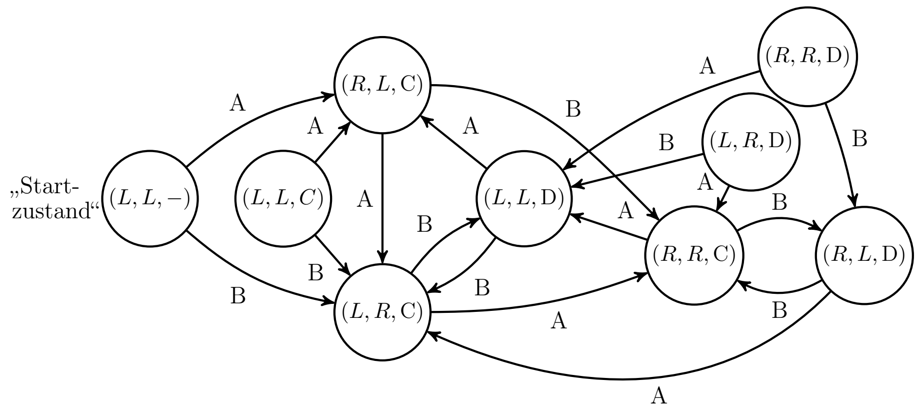


Abbildung 1.2: Übergänge zwischen den Zuständen beim Problem "Murmeln"

Lösung des Problems "Murmeln":

An diesem Bild lässt sich unser ursprüngliches Problem "Murmeln" (Frage: Aus welchem Ausgang rollt die letzte Murmel, wenn nacheinander Murmeln an den Eingängen A, A, B, A, B, B, A eingeworfen werden?) leicht lösen, indem man einfach einen Weg vom „Startzustand" sucht, bei dem die Pfeile nacheinander mit

$$A, A, B, A, B, B, A$$

beschriftet sind. In Abbildung 1.2 gibt es genau einen solchen Weg; er endet mit dem Zustand (L, R, C). Die Antwort auf die ursprünglich gestellte Frage lautet also:

> Wenn nacheinander Murmeln an den Eingängen A, A, B, A, B, B, A eingeworfen werden, so rollt die letzte Murmel durch Ausgang C.

Folie 16

Weiterer Nutzen von Abbildung 1.2

Anhand von Abbildung 1.2 kann auch die folgende Frage beantworten werden:

> Ist es möglich, vom Startzustand aus durch geschicktes Einwerfen von Murmeln zu erreichen, dass die letzte Murmel aus Ausgang D herausrollt und danach beide Hebel nach rechts zeigen?

Um diese Frage zu beantworten muss man einfach nachprüfen, ob es in Abbildung 1.2 einen Weg vom Startzustand zum Zustand (R, R, D) gibt. Man sieht leicht, dass es in Abbildung 1.2 keinen solchen Weg gibt. Folglich lautet die korrekte Antwort auf obige Frage "nein".

$\square$Ende Beispiel 1.1

Folie 17

Transitionssysteme

Bemerkung 1.2.
Wir haben hier den Kalkül der *Transitionssysteme* (auch bekannt als *endliche Automaten* bzw. *Zustandsübergangsdiagramme* oder *Statecharts*) benutzt. Dieser Kalkül eignet sich besonders gut, wenn Abläufe in Systemen mit Übergängen zwischen verschiedenen Zuständen beschrieben werden sollen.

1.3 Literaturhinweise

Quellennachweis: Das "Murmelproblem" aus Beispiel 1.1 ist eine vereinfachte Variante von Aufgabe 2.3 in [HU79].