Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

14. Januar 2022

Logik in der Informatik

Wintersemester 2021/2022

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 24. Januar 2022, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 11 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten in dieser Aufgabe Kalküle über der Menge $M := \mathsf{AL}(\{\neg, \rightarrow\})$.

Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ über M heißt *korrekt*, falls für jede Menge $\Phi \subseteq M$ und jede Formel $\psi \in M$ gilt: Wenn $\psi \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(\Phi)$, dann gilt $\Phi \models \psi$. Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ über M heißt *vollständig*, falls für jede Menge $\Phi \subseteq M$ und jede Formel $\psi \in M$ gilt: Wenn $\Phi \models \psi$, dann ist $\psi \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(\Phi)$.

Seien $\mathfrak{K}_{Syl}$ und $\mathfrak{K}_{Abd}$ die beiden folgenden Kalküle über der Menge M: Beide Kalküle enthalten für jede *allgemeingültige* aussagenlogische Formel $\varphi \in M$ das Axiom $\dfrac{}{\varphi}$.

Außerdem enthält

- $\mathfrak{K}_{Abd}$ für alle $\varphi, \psi \in M$ die Ableitungsregel

$$\frac{\psi \qquad (\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi} \; ,$$

  die *Abduktion* genannt wird,

- $\mathfrak{K}_{Syl}$ für alle $\varphi, \psi, \chi \in M$ die Ableitungsregel

$$\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \qquad (\psi \rightarrow \chi)}{(\varphi \rightarrow \chi)} \; ,$$

  die *Syllogismus* genannt wird.

(a) Geben Sie für $\varphi := \neg(A_0 \rightarrow A_0)$ und $\Phi := \emptyset$ eine möglichst kurze Ableitung von φ aus Φ in $\mathfrak{K}_{Abd}$ an.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{K}_{Abd}$ vollständig, aber nicht korrekt ist.

(c) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{K}_{Syl}$ korrekt, aber nicht vollständig ist.

(d) Betrachten Sie den Kalkül $\mathfrak{K}$ über M, der alle Ableitungsregeln aus $\mathfrak{K}_{Syl}$ und alle Ableitungsregeln aus $\mathfrak{K}_{Abd}$ enthält. Ist $\mathfrak{K}$ korrekt? Ist $\mathfrak{K}$ vollständig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) **Beweisen oder widerlegen** Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $\sigma = \emptyset$. Es gibt einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad |A| \text{ ist eine Primzahl.}$$

(ii) Sei $\sigma = \{E/2, F/2\}$ eine relationale Signatur. Es gibt einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}})$, bei der $\mathcal{G} := (A, E^{\mathcal{A}})$ ein endlicher gerichteter Pfad ist, gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \iff \quad F^{\mathcal{A}} \text{ ist der reflexive und transitive Abschluss von } E^{\mathcal{A}}.$$

Dabei nutzen wir folgende Begriffe:

- Ein Graph $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ ist ein endlicher gerichteter Pfad, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gibt, so dass $|V^{\mathcal{G}}| = n$, $V^{\mathcal{G}} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E^{\mathcal{G}} = \{\, (v_i, v_{i+1}) \,:\, 1 \leq i < n \,\}$.
- Seien $E^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$. $F^{\mathcal{A}}$ heißt transitiver und reflexiver Abschluss von $E^{\mathcal{A}}$, wenn für alle $(a, a') \in A \times A$ gilt:

$$(a, a') \in F^{\mathcal{A}} \quad \iff \quad \begin{array}{l} a = a' \text{ oder es gibt im gerichteten Graphen } \mathcal{G} = (A, E^{\mathcal{A}}) \\ \text{einen Weg vom Knoten } a \text{ zum Knoten } a'. \end{array}$$

(b) Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Betrachten Sie das Alphabet $A := A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ und die Menge $M := A^*$.

Geben Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über der Menge M an, so dass gilt: $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{FO}[\sigma]$. D.h. $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}$ soll aus genau denjenigen Elementen von M bestehen, die gemäß Definition 3.15 syntaktisch korrekte Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ sind.

(c) Sei σ eine Signatur, sei $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ und seien $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

Beweisen Sie die Korrektheit der Sequenzenregel $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A):

$$\frac{\begin{array}{ll} \Gamma, \varphi & \vdash \chi \\ \Gamma, \psi & \vdash \chi \end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Bearbeiten Sie Aufgabe 4 von Blatt 10.