

Logik in der Informatik

Wintersemester 2021/2022

Übungsblatt 8

Abgabe: bis 3. Januar 2022, 13.00 Uhr

Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 8 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

(a) Betrachten Sie die Kinodatenbank \mathcal{D} aus der Vorlesung.

Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine $\text{FO}[\sigma_{\text{KINO}}]$ -Formel φ und ein Variablentupel (x_1, \dots, x_n) mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ an, die die Anfrage beschreiben. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{D}}$.

- (i) Gib die Telefonnummern der Kinos aus, die um 20:15 Uhr oder um 20:30 Uhr eine Vorstellung haben.
 - (ii) Gib alle Filme aus, die in der Datenbank mit mindestens drei verschiedenen Schauspielern geführt werden.
 - (iii) Gib alle Regisseure aus, die in einem Film Regie geführt und auch selbst mitgespielt haben, der gerade nicht im Kino läuft.
 - (iv) Gib alle Filme aus, die nur in einem einzigen Kino gespielt werden, zusammen mit den Anfangszeiten des jeweiligen Filmes.
- (b)
- (i) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Terme (Satz 3.27) per Induktion über den Aufbau von Termen.
 - (ii) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Satz 3.28) per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Aufgabe 3:**(40 Punkte)****(a)** Betrachten Sie die Kinodatenbank \mathcal{D} aus der Vorlesung.Berechnen Sie die Relationen $\llbracket \varphi_1(x_T) \rrbracket^{\mathcal{D}}$, $\llbracket \varphi_2(x_K, x_A) \rrbracket^{\mathcal{D}}$, $\llbracket \varphi_3(x_K, x_Z) \rrbracket^{\mathcal{D}}$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfragen durch die Formeln φ_1 , φ_2 und φ_3 beschrieben werden.

(i) $\varphi_1(x_T) :=$

$$\left(\exists x_Z R_{Prog}(\text{'Babylon'}, x_T, x_Z) \wedge \neg \exists x_Z R_{Prog}(\text{'Casablanca'}, x_T, x_Z) \right)$$

(ii) $\varphi_2(x_K, x_A) := \exists x_S \exists x_{Tel} \exists x_Z \left(R_{Kino}(x_K, x_A, x_S, x_{Tel}) \wedge R_{Prog}(x_K, \text{'Alien'}, x_Z) \right)$

(iii) $\varphi_3(x_K, x_Z) :=$

$$\left(\exists x_T R_{Prog}(x_K, x_T, x_Z) \wedge \forall y_T \forall y_Z \left(R_{Prog}(x_K, y_T, y_Z) \rightarrow \neg \exists x_S \exists x_R \left(R_{Filme}(y_T, x_R, x_S) \wedge (x_S = \text{'George Clooney'} \vee x_R = \text{'George Clooney'}) \right) \right) \right)$$

(b) Sei die Signatur $\sigma := \{E, f\}$. Hierbei ist E ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $\forall x \exists y f(x) = y \equiv \exists y \forall x f(x) = y$

(ii) $\forall x \forall y \left(E(x, y) \rightarrow E(y, x) \right) \equiv \forall y \forall x \left(\neg E(y, x) \rightarrow \neg E(x, y) \right)$

(iii) $\exists x \exists y f(x) = y \equiv \forall x \exists y \left((x = y \vee E(x, y)) \rightarrow \exists z (z = y \vee E(z, y)) \right)$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind für alle Signaturen σ und alle FO[σ]-Formeln φ und ψ korrekt, welche nicht?

(i) $(\forall x \varphi \wedge \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$

(iii) $(\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi)$

(ii) $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \vee \psi)$

(iv) $(\exists x \varphi \vee \exists x \psi) \equiv \exists x (\varphi \vee \psi)$

Beweisen Sie, dass ihre Antworten zu **(i)** und **(ii)** korrekt sind.

Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 10 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: Fertigen Sie Ihre Lösung für Aufgabenteil (a) auf einem Zettel an. Die Lösung der Aufgabenteile (b), (c) und (d) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code (in einer Datei für diese drei Aufgabenteile zusammen) in einem extra-Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!

(a) Gegeben sei das folgende Prolog-Programm:

```
1  a(X, Y) :- b(X, Y).           5  b(X, Y) :- c(X), c(Y).
2  a(1, 1).                       6  c(2).
3  b(X, X) :- c(X).               7  c(3).
4  b(X, Y) :- c(X), !, c(Y).
```

Zeichnen Sie einen Suchbaum für die folgende Anfrage: `?- a(X, Y).`

- (b) Schreiben Sie in `blatt8.pl` ein Prädikat `not_member/2`, so dass `not_member(X, L)` für einen Term `X` und eine Liste `L` genau dann erfüllt ist, wenn `X` mit *keinem* Element von `L` unifiziert werden kann. Verwenden Sie dabei abgesehen vom Cut und dem in SWI-Prolog vordefinierten Prädikat `fail/0` keine weiteren Prädikate, und insbesondere nicht `\=/2`.
- (c) Führen Sie in `blatt8.pl` einen neuen Operator `<=>` für die Biimplikation \leftrightarrow ein, der den gleichen Typ und die gleiche Präzedenz wie der in `a1.pl` definierte Operator `=>` hat.
- (d) Implementieren Sie in `blatt8.pl`, analog zu Beispiel 2.54 im Vorlesungsskript, Schritt 1 des Tseitin-Verfahrens. D.h., schreiben Sie ein Prädikat `tseitin/2`, so dass die Anfrage `tseitin(F, L)` für eine aussagenlogische Formel `F` eine Liste `L` aussagenlogischer Formeln ausgibt, die die folgenden Eigenschaften hat:
- Die Konjunktion der Formeln in der Liste `L` ist erfüllbarkeitsäquivalent zu `F`.
 - Die Liste `L` enthält für jede Teilformel von `F` (abgesehen von Literalen) genau eine Formel.
 - In jeder Formel aus `L` kommen höchstens 3 verschiedene Aussagensymbole vor.

Beispielsweise sollte Prolog auf die Anfrage:

```
tseitin((p => ~q) \ / (~ (p /\ q) /\ r), L).
```

wie folgt antworten:

```
L = [x1, x1<=>x2\/x3, x2<=> (p=> ~q), x3<=>x4/\r, x4<=> ~x5, x5<=>p/\q].
```

Hierbei sind die konkrete Wahl der neuen Aussagensymbole sowie die Reihenfolge der Formeln in der Repräsentation der Menge unwesentlich.

Hinweise:

- Benutzen Sie zur Erzeugung neuer Aussagensymbole das in SWI-Prolog eingebaute Prädikat `gensym/2`. Das Prädikat `gensym/2` instantiiert bei dem Aufruf `gensym(x, A)` die Variable `A` mit einem Atom der Form `xn`, wobei eine Zahl `n` so gewählt wird, dass das Atom `xn` in diesem Lauf von SWI-Prolog noch nicht verwendet wurde.
- Benutzen Sie den in Teilaufgabe (c) definierten Operator `<=>`.
- Nutzen Sie ggf. Cut oder Negation. Führen Sie bei Bedarf Hilfsprädikate ein.