

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2021/2022

## Übungsblatt 7

**Abgabe:** bis 13. Dezember 2021, 13.00 Uhr

### Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 7 auf der Moodle-Plattform.

### Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

Sei  $\sigma := \{B, F, L, \text{Nachfolger}, \text{letzter}\}$  eine Signatur, wobei  $B, F, L$  1-stellige Relationssymbole,  $\text{Nachfolger}$  ein 1-stelliges Funktionssymbol und  $\text{letzter}$  ein Konstantensymbol ist. Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Struktur mit  $A = \{1, 2, \dots, 34\}$  und  $\text{letzter}^{\mathcal{A}} = 34$ , so dass für alle  $a \in A$  gilt:

- $a \in B^{\mathcal{A}} \iff$  ALBA BERLIN gewinnt am Spieltag  $a$ ,
- $a \in F^{\mathcal{A}} \iff$  die Fraport Skyliners Frankfurt gewinnen am Spieltag  $a$ ,
- $a \in L^{\mathcal{A}} \iff$  die MHP Riesen Ludwigsburg gewinnen am Spieltag  $a$ , und
- $\text{Nachfolger}^{\mathcal{A}}(a) := \begin{cases} a + 1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \dots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(a) Geben Sie FO[ $\sigma$ ]-Formeln an, die in  $\mathcal{A}$  Folgendes aussagen:

- (i) Die Fraport Skyliners Frankfurt gewinnen an mindestens einem Spieltag.
- (ii) An jedem Spieltag gewinnt genau eine der drei Mannschaften.
- (iii) Gewinnt ALBA BERLIN an einem Spieltag, dann gewinnt ALBA BERLIN auch an jedem folgenden Spieltag.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[ $\sigma$ ]-Formeln in  $\mathcal{A}$  aussagt:

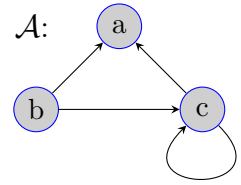
- (i)  $\forall x \left( \neg \left( B(x) \vee x = \text{letzter} \right) \rightarrow B(\text{Nachfolger}(x)) \right)$
- (ii)  $\left( F(\text{letzter}) \vee \forall x \left( \neg \exists y x = \text{Nachfolger}(y) \rightarrow F(x) \right) \right)$
- (iii)  $\forall x \left( \neg L(x) \right.$   
 $\wedge \left( \neg \exists y x = \text{Nachfolger}(y) \rightarrow \left( B(x) \wedge \neg F(x) \right) \right)$   
 $\wedge \left( \neg x = \text{letzter} \rightarrow \left( \left( B(x) \leftrightarrow F(\text{Nachfolger}(x)) \right) \right. \right.$   
 $\left. \left. \wedge \left( F(x) \leftrightarrow B(\text{Nachfolger}(x)) \right) \right) \right)$

**Aufgabe 3:**

**(40 Punkte)**

(a) Sei  $\sigma := \{E\}$  die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol  $E$ .

(i) Betrachten Sie die  $\sigma$ -Struktur  $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ , die durch den Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird. Geben Sie einen FO[ $\sigma$ ]-Satz  $\varphi$  an, der die Struktur eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle  $\sigma$ -Strukturen  $\mathcal{B}$  gelten:



$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$

Erläutern Sie Ihren FO[ $\sigma$ ]-Satz  $\varphi$ .

(ii) Geben Sie für die FO[ $\sigma$ ]-Formel

$$\varphi(x) := \forall y \exists z \left( x=y \vee \left( E(y, x) \rightarrow E(x, z) \right) \right)$$

eine  $\sigma$ -Struktur  $\mathcal{A}$ , deren Universum aus höchstens 4 Elementen besteht, und zwei Interpretationen  $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}, \beta_1)$  und  $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}, \beta_2)$  an, so dass  $\mathcal{I}_1 \models \varphi$  und  $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$  gilt. Begründen Sie jeweils, warum  $\mathcal{I}_1 \models \varphi$  und  $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$  gilt!

(b) Sei  $\Sigma := \{A, N, S\}$  und sei  $\sigma_\Sigma := \{\leq, P_A, P_N, P_S\}$  die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über dem Alphabet  $\Sigma$ .

(i) Geben Sie die Wortstruktur  $\mathcal{A}_w$  für das Wort  $w := \text{NASA}$  über dem Alphabet  $\Sigma$  an.

(ii) Sei  $\mathcal{A}$  die  $\sigma_\Sigma$ -Struktur mit  $A := [6]$ , in der  $\leq^A$  die natürliche lineare Ordnung auf  $[6]$  ist und  $P_A^{\mathcal{A}} := \{1, 3, 5\}$ ,  $P_N^{\mathcal{A}} := \{2, 4\}$  und  $P_S^{\mathcal{A}} := \{6\}$ . Welches Wort  $w \in \Sigma^*$  wird durch  $\mathcal{A}$  repräsentiert?

(iii) **Definition:** Ein FO[ $\sigma_\Sigma$ ]-Satz  $\varphi$  beschreibt eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$ , falls für jedes nicht-leere Wort  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$ . Welche Sprache beschreibt der folgende FO[ $\sigma_\Sigma$ ]-Satz  $\psi$ ?

$$\psi := \forall x \left( P_S(x) \rightarrow \exists y \left( P_A(y) \wedge y \leq x \wedge \forall z (z \leq y \vee x \leq z) \right) \right)$$

Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangssprachlich angeben.

(iv) Geben Sie einen FO[ $\sigma_\Sigma$ ]-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck  $(\text{NA}^*\text{S})^*$  definierte Sprache beschreibt und begründen Sie warum Ihr FO[ $\sigma_\Sigma$ ]-Satz das Gewünschte leistet.

#### Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 9 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Die Kapitel 7 und 8 werden erst am Ende des Semesters bearbeitet.

- (a) Auf der Website zur Prolog-Übung finden Sie die Datei `a1.pl`. Speichern Sie die Datei in einem Verzeichnis Ihrer Wahl.

Machen Sie sich mit den in dieser Datei definierten Operatoren und Prädikaten vertraut. Beachten Sie insbesondere die durch das Prädikat `a1/1` definierte Repräsentation aussagenlogischer Formeln.

Erstellen Sie im selben Verzeichnis eine neue Datei `blatt7.pl`, die mit der Zeile

```
:- ensure_loaded([a1]).
```

beginnt.

*Anmerkung:* Diese Zeile lädt die Operatoren und Prädikate aus `a1.pl`, so dass sie von Ihnen in den folgenden Teilaufgaben benutzt werden können.

- (b) Schreiben Sie (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `as_in_a1/2`, so dass das Ziel `as_in_a1(F, X)` genau dann erfüllt ist, wenn  $F$  eine aussagenlogische Formel repräsentiert und  $X$  ein Aussagensymbol, das in  $F$  vorkommt.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- as_in_a1(~(c => (a /\ ~ b)), X).
```

zu den Antworten  $X = c$ ;  $X = a$ ;  $X = b$ ; `false`. führen.

- (c) Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 2.38 des Vorlesungsskripts, um (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `a12nnf/3` zu schreiben, so dass die Anfrage

```
?- a12nnf(F, P, N).
```

genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- $F$  repräsentiert eine aussagenlogische Formel  $\varphi$ ,
- $P$  repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu  $\varphi$  äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und
- $N$  repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu  $\neg\varphi$  äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform.

*Hinweis:* Erweitern Sie dazu den Beweis von Satz 2.38 um den Fall aussagenlogischer Formeln der Form  $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ .

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- a12nnf(~(c => (a /\ ~ b)), P, N).
```

zu der Antwort

```
P = c /\ (~a\/b), N = ~c\/ (a/\ ~b)
```

führen.

*Hinweise:* Es macht nichts, wenn Prolog die gesuchten aussagenlogischen Formeln über das Backtracking mehrfach ausgibt. Beachten Sie zudem, dass die unschöne Formatierung der Leerzeichen in der Ausgabe aussagenlogischer Formeln nicht zu vermeiden ist und insbesondere keinen Fehler Ihres Prädikats darstellt.