Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

26. November 2021

Logik in der Informatik

Wintersemester 2021/2022

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 6. Dezember 2021, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 6 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

(a) **(i)** Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ an, die zu keiner Hornformel äquivalent ist.

(ii) Gibt es eine Formel in AL, die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist?

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmenge

$$\Gamma := \{ \{F\}, \{\neg F, \neg P_1\}, \{F, P_1\}, \{\neg P_1, \neg P_2, P_3\}, \{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_3\}, \{\neg P_2, Q\}, \{\neg P_2, S\}, \{\neg Q, \neg S, P_2\}, \{\neg P_3, Q, \neg S\}, \{P_3, S\}, \{P_3, \neg Q\} \}$$

aus Aufgabe 3(b) von Blatt 4 bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,d),(d,a),(d,b),(e,e)\}$ über der Menge $A := \{a,b,c,d,e\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils

(i) reflexiv ist?
(ii) symmetrisch ist?
(iii) antisymmetrisch ist?
(iv) konnex ist?
(v) transitiv ist?

(d) Sei $\sigma := \{f, c\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei $A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$ und $c^{\mathcal{A}} := \text{Spock}$. Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x,y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Stein}, \beta(v_1) = \text{Spock}, \beta(v_2) = \text{Schere}, \text{ und } \beta(v_i) = \text{Papier} \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie für jedes $i \in [4]$ den Wert $[\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme:

(i) $t_1 := f(c, v_1)$
(ii) $t_2 := f(v_1, f(v_0, v_2))$
(iii) $t_3 := f(f(c, v_0), f(v_2, v_1))$
(iv) $t_4 := f(c, f(f(v_6, v_7), f(v_2, c)))$

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabeklauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi \;:=\; \neg P \;\wedge\; ((Q \wedge P) \to S) \;\wedge\; (\mathbf{1} \to Q) \;\wedge\; (R \vee \neg Q) \;\wedge\; ((W \wedge Q \wedge R) \to \mathbf{0}) \;\wedge\; (\mathbf{0} \to W)$$

(b) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma \;:=\{\,\{P\},\ \{Q\},\ \{\neg S, T\},\ \{R\},\ \{\neg Q, \neg S\},\ \{\neg Q, \neg R, T\},\ \{\neg T, \neg W, S\},\ \{\neg Q, \neg P, W\}\,\}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.66 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklauseln mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

(c) Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{g, i, k, l, o, p, r\}$.

(i) Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := \mathit{logik} \in \Sigma^*$ an.

(ii) Sei $\mathcal{B}$ die σ_Σ-Struktur mit dem Universum $B := [6]$, in der $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[6]$ ist und $P_g^{\mathcal{B}} := \{6\}$, $P_l^{\mathcal{B}} := \{4\}$, $P_o^{\mathcal{B}} := \{3,5\}$, $P_p^{\mathcal{B}} := \{1\}$, $P_r^{\mathcal{B}} := \{2\}$, und $P_i^{\mathcal{B}} := P_k^{\mathcal{B}} := \emptyset$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{B}$ repräsentiert?

(d) Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c. Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{1,2,3,4,5\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(3,3),(5,4),(1,1)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(2,2,4),(5,3,1)\}$, $c^{\mathcal{A}} := 2$
- $B := \{v,w,x,y,z\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(v,v),(z,y),(x,x)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(w,w,y),(z,x,v)\}$, $c^{\mathcal{B}} := w$
- $C :=$ {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄}, $R^{\mathcal{C}} :=$ {(⚄, ⚄), (⚂, ⚂), (⚀, ⚁)}, $S^{\mathcal{C}} :=$ {(⚀, ⚂, ⚄), (⚃, ⚃, ⚁)}, $c^{\mathcal{C}} :=$ ⚃

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}} \colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}} \colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{A}}(x)$	2	1	2	5	4

x	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{B}}(x)$	w	v	z	x	y

x	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄
$f^{\mathcal{C}}(x)$	⚁	⚀	⚃	⚄	⚃

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 6 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für Aufgabenteil (a) auf einem Zettel an. Die Lösung der Aufgabenteile (b) und (c) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code (in einer Datei für beide Aufgabenteile zusammen) in einem extra-Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!*

(a) Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- append([c,d], [e,a], X).
```

(b) *Binärbäume* seien wie in der dritten Prolog-Übungsstunde definiert (vgl. die Folie zum Spiegeln von Binärbäumen auf der Website zur Prolog-Übung). Beispielsweise wird der linke dort abgebildete Binärbaum $\mathcal{B}$ repräsentiert durch den folgenden Prolog-Term:

B := `tree(tree(leaf(1),tree(leaf(2),leaf(3))),leaf(4))`

Schreiben Sie ein Prädikat `label/2`, so dass die Anfrage `?- label(B, X).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums $\mathcal{B}$ und einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` die Beschriftung eines Blattes von $\mathcal{B}$ ist.

Für unseren Baum $\mathcal{B}$ soll beispielsweise die Anfrage

```
?- label(B, X).
```

die Antworten

```
X = 1;     X = 2;      X = 3;      X = 4.
```

liefern.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `labels/2`, so dass die Anfrage `?- labels(B, Y).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und eine Liste `Y` von Prolog-Termen genau dann erfüllt ist, wenn `Y` eine Auflistung der Beschriftungen aller Blätter des repräsentierten Binärbaums $\mathcal{B}$ ist; und zwar in der Reihenfolge vom am weitesten links zum am weitesten rechts stehenden Blatt.

Für unseren Baum $\mathcal{B}$ soll beispielsweise die Anfrage

```
?- labels(B, Y).
```

die Antwort

```
Y = [1, 2, 3, 4].
```

liefern.

Hinweis: Benutzen Sie gegebenfalls das Prädikat `append/3`.