Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. November 2021

Logik in der Informatik

Wintersemester 2021/2022

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 29. November 2021, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 5 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

(a) Beweisen Sie per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt: $\Gamma \vdash_R \delta \implies \Gamma \models \delta$.

(b) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil **(a)**, d.h. gilt für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ: $\Gamma \models \delta \implies \Gamma \vdash_R \delta$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma := \Big\{ \{P\}, \{R\}, \{T\}, \{\neg P, \neg Y\}, \{\neg P, \neg R, S\}, \{\neg S, \neg X, Y\}, \{\neg P, \neg T, X\}, \{S, \neg Y\} \Big\}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.66 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklausel mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Im Folgenden betrachten wir einen *Baum* $\mathcal{B}$ mit der *abzählbar unendlichen Knotenmenge* $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von $\mathcal{B}$ ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von $\mathcal{B}$ repräsentieren wir durch eine Funktion *Kinder*, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B}$ *endlich verzweigend* ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ endlich ist.

(i) Ein *Pfad* in $\mathcal{B}$ ist eine (endliche oder unendliche) Folge $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ von Knoten aus V, so dass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von $\mathcal{B}$, und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \mathit{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ *repräsentiert einen Pfad* $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \mathsf{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \iff v \in \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage *„Der Knoten v gehört zum Pfad P"*.

Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

(ii) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ hat die Länge n. Wir sagen, dass der Baum $\mathcal{B}$ *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn $\mathcal{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält.

Beweisen Sie mit Hilfe des *Endlichkeitssatzes* das folgende Lemma von Dénes Kőnig (1936):

Kőnigs Lemma. *Wenn $\mathcal{B}$ Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält $\mathcal{B}$ einen Pfad unendlicher Länge.*

(b) Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Klauselmenge Γ an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht.

$$\Gamma := \Big\{ \{\neg R, T, W\},\ \{\neg R, \neg S, \neg W\},\ \{\neg R, \neg T\},\ \{\neg Q, S, T\},\ \{\neg Q, R, \neg S\},$$
$$\{R, S, W\},\ \{R, \neg T, \neg W\},\ \{Q, U\},\ \{S, \neg U, \neg W\},\ \{Q, W\},\ \{Q, \neg S, \neg U\} \Big\}$$

Hinweis: Wählen Sie in Zeile 4 des DPLL-Algorithmus positive Literale, und zwar in alphabetischer Reihenfolge. Ebenso wählen Sie bei der Anwendung der Vereinfachungsheuristiken die Literale in alphabetischer Reihenfolge. Lösungen, die sich nicht an diese Regel halten, werden nicht korrigiert.

Geben Sie analog wie in Beispiel 2.64 die entstehende Klauselmenge und die benutzte Vereinfachungsheuristik an.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Wir kodieren aussagenlogische Literale wie folgt durch Prolog-Terme: Ist $i \in \mathbb{N}$, dann repräsentiert `pos(`i`)` das Literal A_i und `neg(`i`)` das Literal $\neg A_i$. Weiterhin kodieren wir Mengen von Literalen als Prolog-Listen. Beispielsweise repräsentieren wir $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ durch `[pos(1), neg(2), neg(3)]`.
Schreiben Sie ein Prädikat `resolvente/3`, so dass Folgendes gilt: Unter der Annahme, dass `L1`, `L2` und `R` Mengen von Literalen repräsentieren, ist `resolvente(L1, L2, R)` genau dann erfüllt, wenn `R` eine Resolvente von `L1` und `L2` ist. Beispielsweise sollte die Anfrage
`?- resolvente([pos(1), neg(3), pos(4)], [pos(2), pos(3), neg(4)], R).`
zu folgenden Ausgaben führen:

`R = [pos(1),pos(4),pos(2),neg(4)]` und `R = [pos(1),neg(3),pos(2),pos(3)]`
Hinweise: Nutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `nimm/3` aus Blatt 4 Teilaufgabe **4(c)**; haben Sie diese Aufgabe nicht gelöst, so können Sie die Online-Hilfe von SWI-Prolog nutzen, um sich mit dem vordefinierten Prädikat `select/3` vertraut zu machen. Nutzen Sie außerdem das vordefinierte Prädikat `union/3`.

(b) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben `F`, `A`, `K`, `E`, `C`, `S`, `T`, `O`, `R`, `Y` die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise den Buchstaben `C`, `A`, `K`, `E` die Ziffern 8, 7, 1, 4 zu, so entpricht `CAKE` der Dezimalzahl 8714.

```
        F A K E
+       C A K E
---------------
=     S T O R Y
```

Definition:

Eine Zuordnung der Ziffern aus $\{0, \ldots, 9\}$ zu den Buchstaben `F`, `A`, `K`, `E`, `C`, `S`, `T`, `O`, `R`, `Y` ist eine Lösung für das Rätsel, wenn

- die Gleichung `FAKE` + `CAKE` = `STORY` erfüllt ist,
- es keine zwei Buchstaben aus $\{\texttt{F}, \texttt{A}, \texttt{K}, \texttt{E}, \texttt{C}, \texttt{S}, \texttt{T}, \texttt{O}, \texttt{R}, \texttt{Y}\}$ gibt, denen die gleiche Ziffer zugeordnet ist und
- die Zahlen aus der Gleichung keine führenden Nullen besitzen (d.h.: weder `F` noch `C` noch `S` darf die Ziffer 0 zugeordnet werden).

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/10`, so dass

```
raetsel(F, A, K, E, C, S, T, O, R, Y)
```

alle Lösungen für das Rätsel ausgibt.

Fügen Sie Ihrer Datei abschließend einen Fakt `anzahl/1` hinzu, der besagt, wieviele Lösungen Sie gefunden haben.

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \ldots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.