Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

5. November 2021

Logik in der Informatik

Wintersemester 2021/2022

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 15. November 2021, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 3 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

(a) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\to}$, so dass für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$[\![(X \mathbin{\tilde{\to}} Y)]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![(X \to Y)]\!]^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.28) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren und beweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie die Einschränkung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems auf Formeln in DNF, d.h.: Die Eingabe besteht aus einer aussagenlogischen Formel φ in DNF, und die Aufgabe ist, zu entscheiden ob φ erfüllbar ist.

Finden Sie heraus, ob dieses Problem effizient gelöst werden kann. Falls „ja“, geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des Problems an; falls „nein“, weisen Sie nach, dass das Problem NP-hart ist.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Beweisen Sie, dass für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$, in der keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn φ unerfüllbar ist, dann ist $\tilde{\varphi}$ allgemeingültig.

(b) Finden Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\neg, \to\}$ und $\tau_2 := \{\vee, \wedge, \mathbf{0}\}$ heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.34). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Betrachten Sie die beiden Formel

$$\begin{aligned} \varphi &:= \Big(\big(A_2 \vee \neg(A_0 \vee A_1)\big) \wedge \neg A_4\Big) \quad \text{und} \\ \psi &:= \Big(A_3 \vee \big((\neg A_2 \to (\neg A_0 \vee A_1)) \wedge A_4\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und die Formel ψ in eine äquivalente Formel ψ_{KNF} in KNF um. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.40 und 2.44 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.

- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.
- Benutzen Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe) welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**. Achten Sie darauf, dass in Satz 2.25 häufig die äußeren Klammern fehlen.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei φ_n die in Satz 2.46 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

(i) Bestimmen Sie alle Interpretationen $\mathcal{I}$, für die gilt:
- $\mathcal{I}$ erfüllt φ_n und
- für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine Interpretation, die sich von $\mathcal{I}$ nur dadurch unterscheidet, dass sie *genau* eines der beiden Aussagensymbole X_i, Y_i auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als $\mathcal{I}$, und die φ_n *nicht* erfüllt.

(ii) Beweisen Sie Satz Satz 2.46 der Vorlesung.
Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil **(i)**, dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ von mindestens zwei essentiell verschiedenen Interpretationen $\mathcal{I}$ aus **(i)** erfüllt wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(iii) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ'_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ'_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Arbeiten Sie Kapitel 3 des Buchs "Learn Prolog Now!" durch.

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben. Beachten Sie dazu die Abgabehinweise unter

`https://t1p.de/proLog2122`

Definition:

Läufe aus Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen sind rekusriv wie folgt defniert:
Basisregel:

(B) Das Atom `start` ist ein Lauf.

Rekursive Regeln:

(RV) Ist der Term `t` ein Lauf, so ist auch der Term `vorwaerts`(`t`) ein Lauf.

(RZ) Ist der Term `t` ein Lauf, so ist auch der Term `zurueck`(`t`) ein Lauf.

Aufgaben:

(a) Schreiben Sie ein Prädikat `lauf(X)`, das genau dann gilt, wenn `X` ein Lauf ist.

(b) Schreiben Sie ein Prädikat `laufDerDinge(X)`, das genau dann gilt, wenn `X` ein Lauf ist, in dem nach jedem `vorwaerts`-Schritt mindestens zwei `zurueck`-Schritte ausgeführt werden. Beispielsweise soll der Term `zurueck(zurueck(vorwaerts(start)))` das Prädikat erfüllen, `vorwaerts(zurueck(zurueck(start)))` jedoch nicht.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `endeGutAllesGut/1`, welches genau dann gilt, wenn das Argument ein Lauf ist, der *mehr* `vorwaerts`- als `zurueck`-Schritte enthält.

Vorgehen: Definieren Sie hierfür ein Hilfsprädikat `endeGutAllesGut(X,Y,Z)`, das genau dann für einen Lauf `X` gilt, falls `Y` als Unärzahl[1] der Anzahl der `vorwaerts`-Schritte entspricht und `Z` unär der Anzahl der `zurueck`-Schritte des Laufes `X` entspricht. Nutzen Sie weiterhin ein selbstdefiniertes Prädikat `greater/2` um die zwei Unärzahlen zu vergleichen.

[1] Analog zum Buch mittels `0` und `succ`.