Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

29. Oktober 2021

Logik in der Informatik

Wintersemester 2021/2022

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 8. November 2021, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 2 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Der Veranstalter des *Winter Sneeze* Festivals hat als Übernachtungsmöglichkeit unter anderem einen 25 mal 25 Parzellen großen Zeltplatz zur Verfügung. Alle Parzellen sind quadratisch und gleich groß, wodurch die Parzelle $\langle i, j\rangle$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 25\}$ benachbart ist zu den Parzellen $\langle i-1, j\rangle$, $\langle i+1, j\rangle$, $\langle i, j-1\rangle$ und $\langle i, j+1\rangle$. Hierbei haben Parzellen am Rand des Zeltplatzes natürlich weniger als vier Nachbarn.

Es werden als Zuschauergruppierungen ***M****etler*, ***H****ippies*, ***R****ocker* und ***G****oths* erwartet. Außerdem werden einige Parzellen für ***T****rixie-Klos* benötigt. Auf jeder Parzelle kann immer nur exakt eine Zuschauergruppierung übernachten oder ein Klo stehen.

Um einen Belegungsplan für den Zeltplatz zu erstellen benutzt der Veranstalter die Aussagensymbole $M_{i,j}, H_{i,j}, R_{i,j}, G_{i,j}, T_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 25\}$. Hierbei beschreibt z. B. $R_{13,9}$ ob Parzelle $\langle 13, 9\rangle$ von Rockern belegt wird. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

Nun soll der Zeltplatz maximal ausgelastet werden und es sollen dabei die Wünsche aller Festivalteilnehmer berücksichtigt werden. Hierbei sind Festivalteilnehmer, die auf einer Parzelle am Rand des Zeltplatzes übernachten, immer zufrieden egal wer oder was sich wo sonst auf dem Zeltplatz befindet, da man mit einem Randplatz besonders schnell zur Bühne gelangt.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass jede Parzelle des Zeltplatzes belegt ist und keine Doppelbelegung existiert.

(b) Sei

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i,j \in \{2,\dots,24\}} \big((M_{i,j} \lor R_{i,j}) \to (\neg T_{i-1,j} \land \neg T_{i+1,j} \land \neg T_{i,j-1} \land \neg T_{i,j+1}) \big) .$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Hippies sind, sofern sie keine Parzelle am Rand bekommen, nur zufrieden, wenn mindestens auf einer Nachbarparzelle ebenfalls Hippies übernachten und zusätzlich auf keiner Nachbarparzelle Metler wohnen. Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die repräsentiert, dass alle Hippies zufrieden sind.

(d) Goths wollen sich mindestens einmal pro Nacht in großer Gruppe treffen, weswegen irgendwo auf dem Zeltplatz eine von Goths bewohnte Parzelle existieren muss, die von vier anderen Parzellen, die ebenfalls von Goths bewohnt werden, umgeben ist. Stellen Sie eine Formel φ_4 auf, die repräsentiert, dass mindestens eine solche Parzelle existiert.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Für jede aussagenlogische Formel φ gilt:

$$\varphi \text{ ist erfüllbar.} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\varphi \text{ ist nicht allgemeingültig.}$$

(b) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Quadratzahl*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m^2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \ := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist .} \end{cases}$$

Sei $\Phi := \{\varphi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow A_0)$, $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_1)$, $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_9)$, $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_{16})$ und $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{25})$.
Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$. Beweisen Sie, dass tatsächlich $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

(c) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J} \varphi_{i,j} \ \equiv \ \bigvee_{j\in J} \bigwedge_{i\in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel φ äquivalent zu unendlich vielen verschiedenen aussagenlogischen Formeln ist.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Arbeiten Sie Kapitel 2 des Buchs “Learn Prolog Now!” durch.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

(i) `donut` und `croissant`

(ii) `tier(X)` und `tier(toto)`

(iii) `Essen` und `'Essen'`

(iv) `lecker` und `'lecker'`

(v) `gut(pizza, Y)` und `gut(X, salami)`

(vi) `f(a, X, Y)` und `f(X, Y, b)`

(vii) `plus(sqr(a), X)` und `plus(sqr(Y), mult(b, Y))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe **4(b)** von Blatt **1**. Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- verfolgt(darth_vader, Y).
```