Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Version von 2022-01

Veranstaltung „Logik in der Informatik“

Einige Beispiele für Aufgaben zur Vorbereitung auf eine Klausur

Bitte beachten Sie, dass die folgenden Aufgaben lediglich einige ausgewählte Beispiele enthalten. Prüfungsrelevant ist der gesamte in den Vorlesungen und Übungen behandelte Stoff. Als Vorbereitung auf die Klausur empfehlen wir Ihnen dringend, die in der Vorlesung vermittelten Definitionen, Sätze, Methoden, Beispiele etc. sowie die in den Übungen behandelten Aufgaben und deren Lösungen durchzuarbeiten.

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

dd. MONAT 20xx

Logik in der Informatik
Klausur vom dd. MONAT 20xx
(Modulabschlussprüfung)

Name: Musterfrau ______ Vorname: Max ______

Matrikelnummer: 123456 ______

Bitte beachten Sie:

- Die Abgabe Ihrer Klausur wird auf diesem Blatt von uns durch eine Unterschrift bestätigt. Das Blatt dient somit als Nachweis für die Abgabe Ihrer Klausur.
- Auf der Rückseite dieses Blattes finden Sie eine ID.
  Sie benötigen diese ID, um Ihr Klausurergebnis zu erfahren.

  Die Ergebnisse der Klausur werden spätestens am dd.mm.yyyy ab HH:MM Uhr auf der zur Vorlesung gehörigen Internetseite bekannt gegeben. Am tt.mm.jjjj findet von HH–hh Uhr in Raum x.yyy eine Klausureinsicht statt.

Bitte lassen Sie sich dieses Blatt bei der Abgabe Ihrer Klausur unterschreiben.

Nehmen Sie das Blatt beim Verlassen des Hörsaals mit.

Geben Sie das Blatt *nicht* ab, und nutzen Sie es *nicht* für Ihre Lösungen!

Bestätigung der Abgabe: ______

Die ID Ihrer Klausur lautet:

42

Bitte beachten Sie den folgenden Auszug aus der ZSP-HU, § 111 und § 112.

§111 (1) „[...] Wer bei der Ablegung einer Prüfung täuscht oder zu täuschen versucht, hat die Prüfung nicht bestanden. Wird die Täuschung erst bekannt, nachdem die Erbringung der Studienleistung oder das Bestehen der Prüfung bestätigt ist, wird die Bestätigung aufgehoben und eingezogen. Die Leistungspunkte werden entzogen."

§111 (2) „Eine Täuschung oder ein Täuschungsversuch liegt insbesondere vor, wenn [...] nicht zugelassene Hilfsmittel verwendet werden. [...]"

§111 (3) „Bei wiederholter Täuschung oder wiederholtem Täuschungsversuch kann die Studentin oder der Student von der Wiederholung der betroffenen Studienleistung oder Prüfung ausgeschlossen werden. [...]"

§111 (5) „Wird eine Täuschung erst bekannt, nachdem die Abschlussdokumente nach § 115 erteilt sind, kann der akademische Grad nach Maßgabe der landesrechtlichen Regelungen entzogen werden."

§112 (1) „[...] Wer bei der Ablegung einer Prüfung stört oder zu stören versucht, hat die Prüfung nicht bestanden. Wird die Störung erst bekannt, nachdem die Erbringung der Studienleistung oder das Bestehen der Prüfung bestätigt ist, wird die Bestätigung aufgehoben. Die Leistungspunkte werden entzogen. [...]"

§112 (2) „Eine Störung oder ein Störungsversuch liegt insbesondere vor, wenn Hilfe zu einer Täuschung oder einem Täuschungsversuch geleistet wird oder andere Studentinnen und Studenten trotz Ermahnung bei der Erbringung der Studienleistung oder Ablegung der Prüfung beeinträchtigt werden."

§112 (3) „§ 111 Absatz 3 bis 5 gelten entsprechend."

Aufgabe 1: **(31 Punkte)**

(a) Sasha, Robin und Mika wollen gemeinsam eine extragroße Pizza bestellen. Hierbei stehen als zusätzliche Pizzabeläge *Ananas*, *Paprika* und *Sardellen* zur Auswahl. Sasha, Robin und Mika haben dabei jeweils Bedingungen an die Auswahl. (7 Pkte)

Sashas Bedingung: Die Pizza soll nicht sowohl mit Ananas als auch Sardellen belegt sein.

Robins Bedingung: Es soll sich Paprika oder Ananas auf der Pizza befinden (oder beides).

Mikas Bedingung: Wenn sich keine Sardellen oder keine Paprika auf der Pizza befindet, dann soll auch keine Ananas auf der Pizza sein.

Formalisieren Sie jede der drei Bedingungen durch je eine aussagenlogische Formel, indem Sie die atomaren Aussagen A (Ananas ist auf der Pizza), P (Paprika ist auf der Pizza) und S (Sardellen befinden sich auf der Pizza) benutzen.

$\varphi_{\text{Sasha}} :=$

$\varphi_{\text{Robin}} :=$

$\varphi_{\text{Mika}} :=$

Robin stellt fest: „Toll! Jetzt müssen wir uns nur noch entscheiden, ob wir Sardellen wollen oder nicht. Die anderen Pizzabeläge stehen ja fest.“

Ist Robins Aussage korrekt?

Antwort:

Lösungsweg:

(b) Wandeln Sie die Formel (3 Pkte)

$$\varphi \ := \ \Big(\left(A_3 \wedge (A_0 \vee \neg A_2) \right) \ \vee \ \neg (\neg A_1 \wedge A_4) \Big)$$

in eine äquivalente Formel φ_{KNF} in konjunktiver Normalform um.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (3 Pkte)

Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt: Wenn φ erfüllbar ist und ψ erfüllbar ist, dann ist auch $(\varphi \vee \psi)$ erfüllbar.

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ unerfüllbare Formeln. Dann ist $(\varphi \rightarrow \psi)$ unerfüllbar.

Für alle Formeln $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{AL}$ gilt: Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \chi$ gilt, dann gilt auch $\varphi \models \chi$.

(d) Geben Sie für folgende Klauselmengen jeweils eine erfüllende Interpretation oder eine Resolutionswiderlegung an. (6 Pkte)

$$\Gamma_1 \;:=\; \{\, \{X, Y, Z\},\ \{X, \neg Y\},\ \{\neg X, \neg Z\},\ \{Y, \neg Z\},\ \{\neg Y, Z\} \,\}$$

$$\Gamma_2 \;:=\; \{\, \{A, \neg B\},\ \{\neg A, \neg B\},\ \{B, \neg C\},\ \{A, B, C\},\ \{\neg A, B, C\} \,\}$$

(e) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf die folgende Klauselmenge Γ an: (6 Pkte)

$$\Gamma \ := \ \{ \{W, \neg X, \neg Y, \neg Z\}, \ \{X\}, \ \{X, \neg W, \neg Y\}, \ \{Y, \neg X\} \ \}$$

Geben Sie für jeden Schleifendurchlauf des Algorithmus die in diesem Durchlauf gewählte Tatsachenklausel und die am Ende des Durchlaufs aktuelle Klauselmenge an. Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus am Ende?

(f) Der 3-stellige Junktor # sei definiert durch: (6 Pkte)

φ	ψ	χ	$\#(\varphi, \psi, \chi)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Zeigen Sie, dass $\{\#\}$ adäquat ist.
D.h.: Zeigen Sie, dass jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ äquivalent zu einer Formel $\psi \in \mathsf{AL}(\{\#\})$ ist.

Aufgabe 2: **(22 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{K, F\}$ die Signatur, die aus zwei zweistelligen Relationssymbolen K und F besteht. Jede σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, K^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}})$ repräsentiert Aspekte eines sozialen Netzwerks:

- A ist die Menge der Personen im sozialen Netzwerk,
- jedes Tupel $(a, b) \in K^{\mathcal{A}}$ repäsentiert die Information „Person a hat einen Beitrag von Person b kommentiert“,
- jedes Tupel $(a, b) \in F^{\mathcal{A}}$ repäsentiert die Information „Person a ist ein Follower von Person b“.

(i) Geben Sie die σ-Struktur $\mathcal{A}$ an, die das soziale Netzwerk repräsentiert, das aus den Personen *Mika*, *Robin* und *Sasha* besteht und in dem gilt: (3 Pkte)

Sasha hat Beiträge von Robin und Mika kommentiert, Robin und Sasha sind Follower von Mika und Robin ist ein Follower von Sasha.

(ii) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ an, der in σ-Strukturen besagt, dass es mindestens zwei verschiedene Personen gibt, von denen keine Follower der jeweils anderen ist. (2 Pkte)

(iii) Beschreiben Sie umgangssprachlich, wann der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ von einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ erfüllt wird. (2 Pkte)

$$\varphi \ := \quad \forall x \forall y \left(K(x, y) \ \rightarrow \ F(x, y) \right)$$

(iv) **Zur Erinnerung:** Für eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Relation $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$ wie folgt definiert: (2 Pkte)

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;:=\; \{\ (a_1, \dots, a_n) \in A^n :\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\ \}.$$

Betrachten Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\begin{aligned} \psi(x,y) \;:=\; & \neg\Big(F(x,y) \ \vee\ F(y,x) \ \vee\ x{=}y \Big) \\ & \wedge\ \ \exists z \Big(\neg z{=}x \ \wedge\ \neg z{=}y \ \wedge\ K(x,z) \ \wedge\ K(y,z) \Big) \ . \end{aligned}$$

Geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch $\psi(x,y)$ beschrieben wird (d.h.: beschreiben Sie umgangssprachlich, wie die Relation $[\![\psi(x,y)]\!]^{\mathcal{A}}$ für beliebige σ-Strukturen $\mathcal{A}$ genau aussieht).

(v) Betrachten Sie nun die konkrete σ-Struktur $\mathcal{B} := (B, K^{\mathcal{B}}, F^{\mathcal{B}})$ mit dem Universum (2 Pkte)

$$B \;=\; \{\ \text{Alfons},\ \text{Belinda},\ \text{Carlos},\ \text{Dora},\ \text{Emil},\ \text{Frauke}\ \}$$

und den Relationen

$$\begin{aligned} K^{\mathcal{B}} \;=\; \{\ & (\ \text{Alfons},\ \text{Dora}\ ), \\ & (\ \text{Alfons},\ \text{Emil}\ ), \\ & (\ \text{Belinda},\ \text{Emil}\ ), \\ & (\ \text{Carlos},\ \text{Dora}\ ), \\ & (\ \text{Dora},\ \text{Emil}\ )\ \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F^{\mathcal{B}} \;=\; \{\ & (\ \text{Alfons},\ \text{Belinda}\ ), \\ & (\ \text{Alfons},\ \text{Dora}\ ), \\ & (\ \text{Belinda},\ \text{Emil}\ ), \\ & (\ \text{Carlos},\ \text{Dora}\ ), \\ & (\ \text{Dora},\ \text{Carlos}\ )\ \}\ . \end{aligned}$$

Geben Sie die Relation $[\![\psi(x,y)]\!]^{\mathcal{B}}$ an.

(b) Sei $\sigma := \{E, B\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E und dem einstelligen Relationssymbol B. Gegeben sei die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel (4 Pkte)

$$\varphi(y) \ := \ \ \forall x \Big(\big(E(x,y) \ \to \ E(y,x) \big) \ \land \ \big(\neg E(x,y) \ \to \ B(x) \big) \Big).$$

Geben Sie eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ und zwei Belegungen $\beta_1, \beta_2 \colon \mathsf{VAR} \to A$ an, so dass für die Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}, \beta_2)$ gilt:

$$\mathcal{I}_1 \ \models \ \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{I}_2 \ \not\models \ \varphi.$$

$\mathcal{A}$:

β_1 :

β_2 :

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (3 Pkte)

Sei σ eine Signatur. Für je zwei beliebige σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt es einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ, so dass $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Sei σ eine Signatur. Zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn die Formel $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ erfüllbar ist.

Sei σ eine Signatur. Wenn φ und ψ $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze sind, so dass $\mathsf{MOD}_\sigma(\{\varphi, \psi\})$ die Menge *aller* σ-Strukturen ist, dann gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models (\varphi \land \psi)$.

(d) Sei $\sigma = \{R, f\}$ die Signatur, die aus dem einstelligen Relationssymbol R und dem zweistelligen Funktionssymbol f besteht. Welche der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln sind in Negationsnormalform (NNF), in Pränex-Normalform (PNF) und/oder in Skolemform? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (3 Pkte)

Formel:	$\forall x\, \exists y \big(\neg R(f(x,y)) \lor R(x)\big)$	$\forall x \big(R(x) \lor \exists y\, (\neg R(y) \lor R(f(x,y)))\big)$
in NNF?		
in PNF?		
in Skolemform?		

(e) Beweisen Sie, dass für jede Signatur σ und alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ gilt: (4 Pkte)

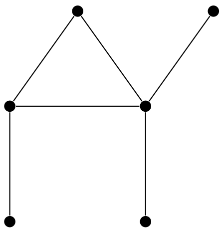
$$(\forall x\, \varphi \ \lor\ \forall x\, \psi) \quad \models \quad \forall x\, (\varphi \ \lor\ \psi)$$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

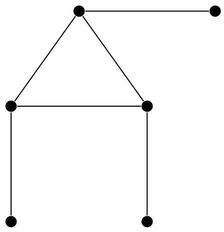
In der gesamten Aufgabe 3 sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

(a) In der folgenden Darstellung der Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u):

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



(i) Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für Duplicator im 2-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. (3 Pkte)

(ii) Geben Sie die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ an, für die Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat. (4 Pkte)

Geben Sie zusätzlich einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe m an, so dass gilt:

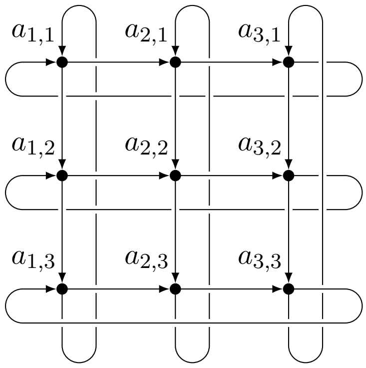
$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

Begründen Sie, warum für Ihren Satz φ tatsächlich $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt.

(b) **Definition:** Für eine σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und eine natürliche Zahl $n \geqslant 1$ sagen wir, dass $\mathcal{A}$ *einen Torus der Größe n enthält*, wenn es n^2 verschiedene Knoten $a_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ in A gibt, so dass die Kantenmenge $E^{\mathcal{A}}$ die folgenden Kanten enthält:

- für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Kante $(a_{i,n}, a_{i,1})$,
- für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Kante $(a_{n,j}, a_{1,j})$, und
- für alle $i, j \in \{1, \ldots, n{-}1\}$ die Kanten $(a_{i,j}, a_{i+1,j})$ und $(a_{i,j}, a_{i,j+1})$.

Ein Torus der Größe 3 sieht zum Beispiel wie folgt aus:



(i) Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ_n an, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_n \iff \mathcal{A}$ enthält einen Torus der Größe n. (4 Pkte)

Beachten Sie: Unter Verwendung der Formeln φ_n kann die Klasse aller σ-Strukturen, die *keinen* Torus enthalten, durch die Formelmenge

$$\Phi \ := \ \{ \neg\varphi_n \ : \ n \geqslant 1 \}$$

erststufig axiomatisiert werden.

(ii) Geben Sie eine präzise Formulierung des Endlichkeitssatzes der Logik erster Stufe an. (5 Pkte)

Zeigen Sie, dass die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$, die einen Torus enthalten, *nicht* erststufig axiomatisierbar ist. D.h.: Zeigen Sie, dass es keine Menge Ψ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \Psi \iff$ es gibt eine natürliche Zahl $n \geqslant 1$, so dass $\mathcal{A}$ einen Torus der Größe n enthält.

(c) **Definition:** Für jede σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ sei $\tilde{\mathcal{A}} := (\tilde{A}, E^{\tilde{\mathcal{A}}})$ die σ-Struktur mit $\tilde{A} = A$ und $E^{\tilde{\mathcal{A}}} := (A \times A) \setminus E^{\mathcal{A}}$. (5 Pkte)

Beweisen Sie, dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und für jede natürliche Zahl $m \geqslant 1$ gilt:

> Falls Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat, so hat Duplicator auch eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 4: **(22 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{f, c\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist. (3 Pkte)

Erinnerung: $A_{\sigma\text{-Terme}}$ ist das Alphabet, das aus allen Elementen in $\mathsf{VAR} = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$, dem Funktionssymbol f, dem Konstantensymbol c, sowie den Klammern (,) und dem Komma , besteht.

Geben Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über der Menge $A^*_{\sigma\text{-Terme}}$ an, aus dem genau die syntaktisch korrekten σ-Terme ableitbar sind, d.h. $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{T}_\sigma$.

(b) Sei σ eine Signatur. (4 Pkte)

Zur Erinnerung: Der in der Vorlesung definierte Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ enthält für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ unter anderem die folgenden Sequenzenregeln:

Voraussetzungsregel (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

$\wedge$-Einführung im Antezedens ($\wedge A_1$), ($\wedge A_2$):

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$$

Erweiterungsregel (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

$\wedge$-Einführung im Sukzedens ($\wedge S$):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi \end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

Fallunterscheidungsregel (FU):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi \end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

$\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee A$):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma, \varphi \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \vdash \chi \end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

Widerspruchsregel (W):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi \end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

$\vee$-Einführung im Sukzedens ($\vee S_1$), ($\vee S_2$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$$

Sei $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$. Zeigen Sie, dass die Sequenz $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

(c) Sei $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol, R ein 2-stelliges Relationssymbol und f_0, f_1 zwei 1-stellige Funktionssymbole sind.

(i) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (3 Pkte)

Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist entscheidbar.	
Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist semi-entscheidbar.	
Das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist semi-entscheidbar.	

(ii) Sei σ eine Signatur. (4 Pkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ und seien $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Variablen.
Seien φ und ψ zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln mit $\text{frei}(\varphi), \text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definition: Wir schreiben $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \sqsubseteq \psi(x_1, \ldots, x_n)$, falls für *jede* σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \subseteq [\![\psi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}}.$$

Betrachten Sie das folgende Problem:

Teilanfragen-Problem für $\mathsf{FO}[\sigma]$.

Eingabe: Zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$

Frage: Gilt $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \sqsubseteq \psi(x_1, \ldots, x_n)$?

Ist das Teilanfragen-Problem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort:

Begründung:

(d) Sei $\sigma := \{R, c, d\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol R und den Konstantensymbolen c und d. (4 Pkte)

Gegeben sei der $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz

$$\varphi \ := \ \forall x \forall y \Big(R(x,y) \ \rightarrow \ R(y,x) \Big) .$$

Geben Sie zwei σ-Herbrandstrukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

$\mathcal{A} :=$

$\mathcal{B} :=$

(e) Wir repräsentieren wie in der Vorlesung natürliche Zahlen durch Terme: Die Zahl 0 wird durch den Term `null` repräsentiert. Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und `X` eine Repräsentation von n als Term, dann repräsentiert `s(X)` die Zahl $n + 1$.

Betrachten Sie das folgende Logikprogramm Π:

```
plus(null, Y, Y).
plus(s(X), Y, s(Z)) :- plus(X, Y, Z).

f(null, null).
f(s(X), Z) :- f(X, Y), plus(Y, s(X), Z).
```

(i) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt, welche nicht? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. (2 Pkte)

`s(null)` ist aus Π ableitbar.

`plus(s(null), s(null), s(s(null)))` ist aus Π ableitbar.

`plus(1, 1, 2)` ist aus Π ableitbar.

`f(s(null), s(null))` ist aus Π ableitbar.

(ii) Ergänzen Sie das Logikprogramm Π um ein Prädikat `intervall/3` zu einem Logikprogramm Π', so dass gilt: Ein Term der Form `intervall(X, Y, Z)`, in dem die Terme `X`, `Y` und `Z` natürliche Zahlen $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ repräsentieren, ist genau dann aus Π' ableitbar, wenn gilt: $k \leqslant \ell$ und $\ell \leqslant m$. (3 Pkte)

Geben Sie als Lösung *nicht* das gesamte Logikprogramm Π' an, sondern nur das Prädikat `intervall/3`.