Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

5. Februar 2021

Logik in der Informatik

Wintersemester 2020/2021

Übungsblatt 12

Abgabe: *bis 15. Februar 2021, 13.^{00} Uhr via Moodle*

*Um unseren Tutor*innen die Arbeit etwas zu erleichtern, notieren Sie bitte auf dem ersten Blatt jeder schriftlich erstellten Abgabedatei oben rechts eingerahmt folgende Daten:*
<Vorname Nachname>, <Matrikelnr.>, <Moodle-Loginname>

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 12 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

(a) Sei $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol, R ein 2-stelliges Relationssymbol und f_0, f_1 zwei 1-stellige Funktionssymbole sind.

Beweisen Sie folgende Aussagen aus Korollar 4.41 aus dem Vorlesungsskript:

- **(i)** Das Unerfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist nicht entscheidbar.
- **(ii)** Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist nicht semi-entscheidbar.

(b) Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol und seien c und d Konstantensymbole.

Sei $\sigma := \{R, c, d\}$ und sei φ der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz:

$$\exists x \exists y \Big(R(x,d) \ \wedge \ R(c,y) \Big) \ \wedge \ \forall x \forall y \Big(R(x,y) \ \rightarrow \ \neg x{=}y \Big)$$

Geben Sie eine σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ und eine σ-Herbrandstruktur $\mathcal{B}$ an, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{A} \models \varphi$ bzw. $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Sei $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol, R ein 2-stelliges Relationssymbol und f_0, f_1 zwei 1-stellige Funktionssymbole sind.

Beweisen Sie die folgende Aussage aus Korollar 4.41 aus dem Vorlesungsskript:

Das Folgerungsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist nicht entscheidbar.

(b) Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol, f ein 1-stelliges Funktionssymbol und sei c ein Konstantensymbol.

Sei $\sigma := \{R, f, c\}$ und sei φ der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz:

$$\forall x \forall y \Big(\big(R(x,y) \ \rightarrow \ y{=}f(x) \big) \ \wedge \ \big(y{=}f(x) \ \rightarrow \ R(x,y) \big) \Big)$$

Geben Sie eine σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ und eine σ-Herbrandstruktur $\mathcal{B}$ an, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{A} \models \varphi$ bzw. $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt.

(c) Sei $\sigma := \{f, c\}$, wobei f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist und c ein Konstantensymbol.

Zeigen Sie, dass Satz 4.46 aus dem Vorlesungsskript im Allgemeinen *nicht* für $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze in Skolemform gilt, die *nicht* gleichheitsfrei sind.

Geben Sie dazu einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ in Skolemform an, so dass gilt:

$$\varphi \text{ ist erfüllbar,} \qquad \text{aber} \qquad \varphi \text{ besitzt kein Herbrand-Modell.}$$

(d) Sei $\sigma := \{R, f\}$, wobei R ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Transformieren Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\forall x \, \neg \big(\neg f(x){=}y \quad \vee \quad \forall y \, R(x,y) \big)$$

in einen zu φ erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$-Satz $\hat{\varphi}$ in Skolemform. Gehen Sie dabei vor wie im Beweis von Satz 4.52 im Vorlesungsskript. Geben Sie insbesondere auch die Signatur $\hat{\sigma}$ sowie die Formeln an, die nach jedem der Schritte 1, 2 und 3 des Beweises entstehen.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 8 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Die Bearbeitung der Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Implementieren Sie ein Prädikat `sat/1`, so dass eine Anfrage

```
?- sat(F).
```

für eine aussagenlogische Formel `F` genau dann erfolgreich ist, wenn `F` erfüllbar ist.

Hinweise: Ihr Prädikat soll zu der Formel `F` zuerst eine *erfüllbarkeitsäquivalente 3-KNF* konstruieren, und anschließend deren Erfüllbarkeit mit dem DPLL-Algorithmus testen. Es macht nichts, wenn Ihr Prädikat für eine erfüllbare Formel mehrfach

```
true.
```

ausgibt.

(b) Für Vergleiche von SAT-Solvern werden 3-KNF oft im sogenannten DIMACS-Format angegeben.[1] Implementieren Sie ein Prädikat `sat_dimacs/1`, welches als Argument den Namen einer Datei erhält, so dass beispielsweise die Anfrage

[1] So waren auch auf der SAT Competition 2020 die 2011 festgelegten Regeln gültig, welche auch für uns das DIMACS-Format definieren sollen (vgl. `http://www.satcompetition.org/2011/format-benchmarks2011.html`).

```
?- sat_dimacs('knf.cnf').
```

genau dann erfolgreich ist, falls die in der Datei `knf.cnf` repräsentierte 3-KNF erfüllbar ist. Ist diese nicht erfüllbar, soll das Ergebnis `false.` sein.

Sie können in Ihrer Implementation davon ausgehen, dass die aufgerufene Datei im akutellen Verzeichnis existiert und dem DIMACS-Standard entspricht.

Sie können zur Lösung dieser Aufgabe alle Prolog-Module verwenden, die Sie unter

`https://t1p.de/1lfq`

vorfinden. Dies gilt insbesondere für die Module `tseitin.pl` und `dpll.pl`.[2] Dort finden Sie auch Beispieldateien im DIMACS-Format.

[2] Verfügbar ab 8.02.21 ca.: 20:00 Uhr.