Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

21. Dezember 2020

Logik in der Informatik

Wintersemester 2020/2021

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 11. Januar 2021, 13.^{00} Uhr via Moodle*

*Um unseren Tutor*innen in Zukunft die Arbeit etwas zu erleichtern, notieren Sie bitte auf dem ersten Blatt jeder schriftlich erstellten Abgabedatei oben rechts eingerahmt folgende Daten:*

<Vorname Nachname>, <Matrikelnr.>, <Moodle-Loginname>

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 7 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Im Onlinerollenspiel *Village of Voidcraft* kann sich jeder Spieler einer Plündergilde anschließen; in der Rangliste der 100 besten Spieler wird dann zu jedem Spieler auch die entsprechende Gilde angezeigt. Für diese Aufgabe konzentrieren wir uns auf die drei Gilden *Punktegeier*, *Kistenklopper* und *RaidenStattStudieren*.

Sei $\sigma = \{P, K, R, \mathit{Vorg}, \mathit{erster}\}$ eine Signatur, wobei P, K, R 1-stellige Relationssymbole sind, *Vorg* ein 1-stelliges Funktionssymbol und *erster* ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und $\mathit{erster}^{\mathcal{A}} = 1$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in P^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Punktegeier
- $a \in K^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Kistenklopper
- $a \in R^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde RaidenStatt-Studieren
- $\mathit{Vorg}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 1 \\ a-1, & \text{falls } a \in \{2, \ldots, 100\}. \end{cases}$

(a) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\exists x \exists y \exists z \Big(\big(K(y) \land P(x) \big) \land R(z) \Big)$

(ii) $\exists x \big(P(x) \land \neg \exists y \ x = \mathit{Vorg}(y) \big)$

(iii) $\forall x \big((R(x) \land \neg\, \mathit{erster} = x) \to K(\mathit{Vorg}(x)) \big)$

(b) Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

(i) Auf Platz 1 der Rangliste ist ein Mitglied der Punktegeier.

(ii) Falls ein Spieler von Kistenklopper auf Platz 1 der Rangliste ist, dann stehen auf allen Plätzen Spieler von Kistenklopper.

(iii) Auf der Rangliste stehen mindestens zwei Mitglieder von RaidenStattStudieren.

(iv) Unmittelbar hinter jedem Mitglied von Kistenklopper steht eines von Punktegeier oder RaidenStattStudieren.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Sei $\sigma := \{E, g\}$ eine Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E und dem 1-stelligen Funktionssymbol g. Geben Sie für jeden der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze je eine σ-Struktur an, die den Satz erfüllt und eine, die den Satz nicht erfüllt. Die Universen der Strukturen, die Sie angeben, sollen jeweils maximal 3 Elemente besitzen.

(i) $\forall x\, \neg g(x){=}x \;\wedge\; \forall x \forall y \Big(E(x,y) \;\leftrightarrow\; g(x){=}y \Big)$

(ii) $\forall x \forall y \Big(\big(\neg g(y){=}g(x) \;\leftrightarrow\; E(x,y) \big) \;\vee\; \big(E(x,y) \;\leftrightarrow\; \neg E(y,x) \big) \Big)$

(b) Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$ und sei $\sigma := \sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_a, P_b, P_c\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über Σ.
Definition: Ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

(i) Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ?

$$\psi \;:=\; \forall x \Bigg(P_c(x) \;\rightarrow\; \exists y \Bigg(P_a(y) \wedge y \leqslant x \wedge \forall z \Big((y \leqslant z \wedge z \leqslant x) \rightarrow (z{=}x \vee z{=}y) \Big) \Bigg) \Bigg)$$

Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangssprachlich angeben.

(ii) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(b\,c\,a^*)^*$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Sei $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$. Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(i) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(ii) Es gibt unendlich viele Sophie Germain Primzahlen, d.h. Primzahlen p, so dass $2p + 1$ auch prim ist.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 9 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.
Die Kapitel 7 und 8 werden erst am Ende des Semesters bearbeitet.

(a) Auf der Website zur Prolog-Übung finden Sie die Datei `al.pl`. Speichern Sie die Datei in einem Verzeichnis Ihrer Wahl.

Machen Sie sich mit den in dieser Datei definierten Operatoren und Prädikaten vertraut. Beachten Sie insbesondere die durch das Prädikat `al/1` definierte Repräsentation aussagenlogischer Formeln.

Erstellen Sie im selben Verzeichnis eine neue Datei `blatt7.pl`, die mit der Zeile

```
:- ensure_loaded([al]).
```

beginnt.

Anmerkung: Diese Zeile lädt die Operatoren und Prädikate aus `al.pl`, so dass sie von Ihnen in den folgenden Teilaufgaben benutzt werden können.

(b) Schreiben Sie (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `as_in_al/2`, so dass das Ziel `as_in_al(F, X)` genau dann erfüllt ist, wenn `F` eine aussagenlogische Formel repräsentiert und `X` ein Aussagensymbol, das in `F` vorkommt.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- as_in_al(~(c => (a /\ ~ b)), X).
```

zu den Antworten `X = c; X = a; X = b; false.` führen.

(c) Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 2.38 des Vorlesungsskripts, um (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `al2nnf/3` zu schreiben, so dass die Anfrage

```
?- al2nnf(F, P, N).
```

genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- `F` repräsentiert eine aussagenlogische Formel φ,
- `P` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu φ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und
- `N` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu $\neg\varphi$ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform.

Hinweis: Erweitern Sie dazu den Beweis von Satz 2.38 um den Fall aussagenlogischer Formeln der Form $(\psi_1 \to \psi_2)$.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- al2nnf(~(c => (a /\ ~ b)), P, N).
```

zu der Antwort

```
P = c/\ (~a\/b), N = ~c\/ (a/\ ~b)
```

führen.

Hinweise: Es macht nichts, wenn Prolog die gesuchten aussagenlogischen Formeln über das Backtracking mehrfach ausgibt. Beachten Sie zudem, dass die unschöne Formatierung der Leerzeichen in der Ausgabe aussagenlogischer Formeln nicht zu vermeiden ist und insbesondere keinen Fehler Ihres Prädikats darstellt.