

Logik in der Informatik

Wintersemester 2020/2021

Übungsblatt 5

Abgabe: bis 14. Dezember 2020, 13.⁰⁰ Uhr via Moodle

Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 5 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

- (a) Beweisen Sie per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt: $\Gamma \vdash_R \delta \implies \Gamma \models \delta$.
- (b) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil (a), d.h. gilt für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ : $\Gamma \models \delta \implies \Gamma \vdash_R \delta$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3:

(40 Punkte)

Seien P, Q, R, S, T, U unterschiedliche Aussagensymbole aus AS.

- (a) Stellen Sie für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 := \{\{P, \neg S\}, \{S\}, \{S, R\}, \{\neg S, \neg P\}\}$$

eine aussagenlogische Formel φ_1 in KNF auf, so dass für jede Interpretation \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \iff \mathcal{I} \models \Gamma_1 .$$

- (b) Sei Γ_1 die Klauselmenge aus Aufgabenteil (a) und sei

$$\Gamma_2 := \{\{P, Q, \neg R\}, \{\neg T\}, \{P, Q, \neg S\}, \{\neg Q, P, \neg R\}, \{\neg S, \neg Q, \neg P, R\}, \{S, \neg S\}, \{Q, \neg S, R\}\}$$

$$\Gamma_3 := \{\{\neg P, Q, R, S\}, \{P, R, \neg S\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{\neg R, S\}, \{P\}, \{\neg P, \neg S\}\} .$$

Geben Sie für jede der drei Klauselmengen jeweils ein Modell oder eine Resolutionswiderlegung an. Bei einer Resolutionswiderlegung gehen Sie analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

- (c) Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Klauselmenge Γ_4 an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht.

$$\Gamma_4 := \left\{ \{\neg P, R, S\}, \{\neg Q, U, S\}, \{\neg Q, \neg U, \neg R\}, \{\neg S, \neg Q\}, \{Q, \neg R, \neg P\}, \{P\}, \right. \\ \left. \{Q, U, R\}, \{Q, \neg U, \neg S\}, \{P, T\}, \{P, U\}, \{\neg U, R, \neg T\}, \{P, \neg R, \neg T\} \right\}$$

Hinweis: Wählen Sie in Zeile 4 des DPLL-Algorithmus positive Literale, und zwar in alphabetischer Reihenfolge. Ebenso wählen Sie bei der Anwendung der Vereinfachungsheuristiken die Literale in alphabetischer Reihenfolge. Lösungen, die sich nicht an diese Regel halten, werden nicht korrigiert.

Geben Sie analog wie in Beispiel 2.64 die entstehende Klauselmenge und die benutzte Vereinfachungsheuristik an.

Aufgabe 4:**(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!

- (a) Wir kodieren aussagenlogische Literale wie folgt durch Prolog-Terme: Ist $i \in \mathbb{N}$, dann repräsentiert `pos(i)` das Literal A_i und `neg(i)` das Literal $\neg A_i$. Weiterhin kodieren wir Mengen von Literalen als Prolog-Listen. Beispielsweise repräsentieren wir $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ durch `[pos(1), neg(2), neg(3)]`.

Schreiben Sie ein Prädikat `resolvente/3`, so dass Folgendes gilt: Unter der Annahme, dass `L1`, `L2` und `R` Mengen von Literalen repräsentieren, ist `resolvente(L1, L2, R)` erfüllt wenn `R` eine Resolvente von `L1` und `L2` ist. Beispielsweise sollte die Anfrage `?- resolvente([pos(1), neg(3), pos(4)], [pos(2), pos(3), neg(4)], R)` zu folgenden Ausgaben führen:

`R = [pos(1), pos(4), pos(2), neg(4)]` und `R = [pos(1), neg(3), pos(2), pos(3)]`

Hinweise: Nutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `nimm/3` aus Blatt 4 Teilaufgabe 4(c); haben Sie diese Aufgabe nicht gelöst, so können Sie die Online-Hilfe von SWI-Prolog nutzen, um sich mit dem vordefinierten Prädikat `select/3` vertraut zu machen. Nutzen Sie außerdem das vordefinierte Prädikat `union/3`.

- (b) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben **A**, ..., **H**, **J**, **K** die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise dem Buchstaben **A** die Ziffer 1 und dem Buchstaben **B** die Ziffer 2 zu, so entspricht **AB** der Dezimalzahl 12.

$$\begin{array}{r r r r r r r r r}
 \mathbf{ABC} & - & \mathbf{ADA} & = & \mathbf{EF} & & & & \\
 + & & - & & + & & & & \\
 \mathbf{FG} & + & \mathbf{HDF} & = & \mathbf{HEA} & & & & \\
 = & & = & & = & & & & \\
 \mathbf{BJF} & - & \mathbf{JKG} & = & \mathbf{CJC} & & & &
 \end{array}$$

Können den Buchstaben **A**, ..., **H**, **J**, **K** derart die Ziffern $0, \dots, 9$ zugeordnet werden, dass alle Gleichungen, d.h. sowohl die horizontalen als auch die vertikalen, des Zahlenrätsels erfüllt sind? Dabei soll es keine zwei Buchstaben geben, die für die selbe Ziffer stehen. Führende Nullen sind erlaubt, beispielsweise könnte **E** mit 0 und **F** mit 3 belegt werden, so dass **EF** für die „Dezimalzahl“ 03 steht.

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/10`, so dass

$$\text{raetsel}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$$

genau dann erfüllt ist, wenn **A**, ..., **H**, **J**, **K** eine Lösung für das Rätsel ist!

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \dots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.

Achtung: Falls die Berechnungen aller Lösungen auf `gruenau6` mehr als 10 Sekunden benötigt, werden Sie mit Ihrer Abgabe nicht die volle Punktzahl erreichen.