Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. November 2020

Logik in der Informatik

Wintersemester 2020/2021

Übungsblatt 4

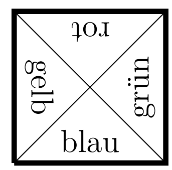
Abgabe: *bis 7. Dezember 2020, 13.00 Uhr via Moodle*

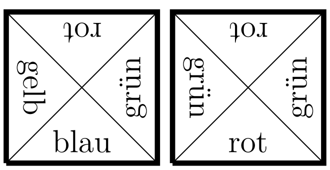
Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 4 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Eine Kachel ist ein Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten (vgl. Beispielabbildung rechts). Alle Kacheln eines Kacheltyps t besitzen die selbe Färbung ihrer Kanten. Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Seien H und V zwei Relationen, die für zwei Kacheltypen t_1, t_2 besagen, dass t_1 und t_2 in dieser Reihenfolge horizontal bzw. vertikal zueinander passen, also die sich berührenden Kanten von der selben Farbe sind.





$(\ t_1\ ,\ \ t_2\ ) \in H$

D.h. für $t_1, t_2 \in K$ gilt:

$(t_1, t_2) \in H$ genau dann wenn t_2 rechts neben t_1 passt

und analog

$(t_1, t_2) \in V$ genau dann wenn t_2 über t_1 passt.

Eine K-Kachelung der $n \times n$-Ebene (für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist eine Funktion $k : \{1, \dots, n\}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Eine K-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene ist eine Funktion $k : \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Benutzen Sie für die Lösung der Aufgabe Aussagensymbole der Form $A^t_{i,j}$ für $t \in K, i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Bedeutung, dass Feld (i,j) mit einer Kachel vom Typ t gekachelt wird.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie eine endliche Menge Γ_n von aussagenlogischen Formeln, so dass jede Interpretation $\mathcal{I}$, die Γ_n erfüllt, einer K-Kachelung der $n \times n$-Ebene entspricht. Begründen Sie die Wahl Ihrer Formelmenge Γ_n.

(b) Zeigen Sie das folgende Theorem:

> Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine K-Kachelung der $(n \times n)$-Ebene gibt, dann gibt es auch eine K-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene.

Hinweis: Nutzen Sie den Endlichkeitssatz der Aussagenlogik.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei φ_n die in Satz 2.46 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

(i) Bestimmen Sie alle Interpretationen $\mathcal{I}$, für die gilt:

- $\mathcal{I}$ erfüllt φ_n und
- für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert eine Interpretation, die sich von $\mathcal{I}$ nur dadurch unterscheidet, dass sie *genau* eines der beiden Aussagensymbole X_i, Y_i auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als $\mathcal{I}$, und die φ_n *nicht* erfüllt.

(ii) Beweisen Sie Satz 2.46 der Vorlesung.
Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil **(i)**, dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$ von mindestens zwei essentiell verschiedenen Interpretationen $\mathcal{I}$ aus **(i)** erfüllt wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(iii) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ'_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ'_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.54 aus dem Vorlesungsskript die Formel

$$\varphi \;:=\; \big(((P \vee \neg Q) \wedge S) \to \neg(Q \vee \neg S)\big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Achtung:
Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.54. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln ψ (beginnend mit ψ_1) werden aufsteigend in der Reihenfolge ihres Vorkommens als Teilwort von φ nummeriert. Hierbei werden die Subformeln in φ wie in Beispiel 2.54 markiert.
- Negierte Aussagensymbole bilden keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 4 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für die Aufgabenteile (a) und (b) auf einem Zettel an. Die Lösung des Aufgabenteils (c) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code in einem extra-Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!*

(a) Wie antwortet Prolog auf die folgenden Anfragen?

- **(i)** `?- [a, X, a] = [Y, b, Y].`
- **(ii)** `?- [Y, c] = [c, Y | []].`
- **(iii)** `?- [_, [] | [a, Y]] = [a, _, Z, b].`
- **(iv)** `?- [a | [b | T]] = [X, H | [c | [d]]].`

(b) Das Prädikat `member/2` wird in Abschnitt 4.2 des Buchs “Learn Prolog Now!” definiert. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- member(a, [b, X, a]).
```

(c) Definieren Sie *rekursiv* ein Prädikat `nimm/3`, so dass `nimm(E, X, Y)` genau dann erfolgreich ist, wenn `E` ein Element der Liste `X` ist und `Y` aus der Liste `X` durch Löschung eines Vorkommens von `E` entsteht.