

Logik in der Informatik

Wintersemester 2020/2021

Übungsblatt 3

Abgabe: bis 30. November 2020, 13.00 Uhr via Moodle

Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 3 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

- (a) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktoren an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktoren $\tilde{\rightarrow}$, so dass für alle $X, Y \in \mathbf{AS}$ und alle Interpretationen \mathcal{I} gilt:

$$\llbracket (X \tilde{\rightarrow} Y) \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 - \llbracket (X \rightarrow Y) \rrbracket^{\mathcal{I}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.28) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren und beweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Betrachten Sie die Einschränkung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems auf Formeln in DNF, d.h.: Die Eingabe besteht aus einer aussagenlogischen Formel φ in DNF, und die Aufgabe ist, zu entscheiden ob φ erfüllbar ist.

Finden Sie heraus, ob dieses Problem effizient gelöst werden kann. Falls „ja“, geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des Problems an; falls „nein“, weisen Sie nach, dass das Problem NP-hart ist.

Aufgabe 3:

(40 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathbf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn $\tilde{\varphi}$ nicht allgemeingültig ist, dann ist φ erfüllbar.

- (b) Betrachten Sie die beiden Formeln

$$\begin{aligned}\varphi &:= \left((\neg A_3 \vee (A_2 \vee \neg A_1)) \wedge (\neg A_3 \vee A_0) \right) \text{ und} \\ \psi &:= \left(\neg A_3 \vee \left((\neg A_2 \rightarrow \neg A_1) \wedge A_0 \right) \right).\end{aligned}$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und die Formel ψ in eine äquivalente Formel ψ_{KNF} in KNF um.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.40 und 2.44 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.
- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.

- Benutzen Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe), welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**. Achten Sie darauf, dass in Satz 2.25 häufig die äußeren Klammern fehlen.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

(c) Finden Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\vee, \mathbf{1}\}$ und $\tau_2 := \{\neg, \rightarrow\}$ heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.34). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben. Beachten Sie dazu die Abgabehinweise auf der Prolog-Übungsseite:

<https://t1p.de/11fq>

Richie R! Rost stellt den Studierenden seiner Dance-Academy den Tanz *Niveaulimbo* vor. Ein Niveaulimbo ist eine Folge der Moves *Crazy Crump* (`crazy_crump`) und *Hipster Hop* (`hipster_hop`). Zudem endet jeder Niveaulimbo in der Ruheposition *Booty Brake* (`booty_brake`). Wir repräsentieren einen Niveaulimbo durch geschachtelte Prolog-Terme. Beispielsweise repräsentiert der Prolog-Term $t_1 := \text{crazy_crump}(\text{crazy_crump}(\text{hipster_hop}(\text{booty_brake})))$ den Niveaulimbo, der mit zwei Crazy Crumps beginnt, gefolgt von einem Hipster Hop, und der schließlich in der Ruheposition *Booty Brake* endet.

- (a) Schreiben Sie ein Prädikat `niveaulimbo/1`, so dass `niveaulimbo(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen Niveaulimbo repräsentiert. Beispielsweise sollte `niveaulimbo(t1)` erfüllt sein.
- (b) Ein *krasser Niveaulimbo* ist ein Niveaulimbo, der folgende zusätzliche Bedingungen erfüllt:
 - Auf jeden Crazy Crump folgt direkt ein weiterer Crazy Crump oder ein Hipster Hop.
 - Auf jeden Hipster Hop folgt direkt ein Crazy Crump oder der *Booty Brake*.

Schreiben Sie ein Prädikat `krass/1`, so dass `krass(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen krassen Niveaulimbo repräsentiert. Beispielsweise sollte `krass(t1)` erfüllt sein, jedoch nicht `krass(hipster_hop(crazy_crump(booty_brake)))`.

- (c) Schreiben Sie ein Prädikat `duo/2`, so dass `duo(X, Y)` für zwei Prolog-Terme `X` und `Y` genau dann gilt, wenn `X` und `Y` Niveaulimbos mit der gleichen Anzahl von Moves repräsentieren und es gilt: Jedesmal wenn im Niveaulimbo `X` ein Crazy Crump ausgeführt wird, wird im Niveaulimbo `Y` ein Hipster Hop ausgeführt; und jedesmal wenn im Niveaulimbo `X` ein Hipster Hop ausgeführt wird, wird im Niveaulimbo `Y` ein Crazy Crump ausgeführt.