Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

13. November 2020

Logik in der Informatik

Wintersemester 2020/2021

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 23. November 2020, 13.^{00} Uhr via Moodle*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 2 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

Halloween ist gegessen. Für das nächste Halloween-Special plant der Konzern für Laramie-Zigaretten zusammen mit Farmer Simpson, die Menschheit mit einer Sucht an Tomacco[1]-Ketchup zu plagen. Für die Frucht benötigt man Tabak- und Tomatensamen, sowie radioaktive Strahlung (im Besonderen Plutonium). Zusätzlich fordert der Zigaretten-Konzern, dass das Ketchup eine besondere Note an Tabakgeschmack haben soll, weshalb Farmer Simpson darüber hinaus Tabakpflanzen anbauen muss. Außerdem möchte der Farmer noch zusätzlich Getreide anbauen, um Futter für die Tiere der anderen Bauern zu haben, damit diese nicht in Versuchung kommen, die Tomacco-Pflanzen zu fressen.

Um den Anbau von Tomacco, Getreide und Tabak zu organisieren, teilt der Farmer sein Land in 20 mal 20 Parzellen ein. Eine Parzelle $\langle i,j\rangle$ mit $i,j \in \{1,2,\ldots,20\}$ ist benachbart zu den Parzellen $\langle i-1,j\rangle$, $\langle i+1,j\rangle$, $\langle i,j-1\rangle$ und $\langle i,j+1\rangle$. Parzellen am Rand haben natürlich weniger als vier Nachbarn.

Auf jeder Parzelle kann **P**lutonium verteilt werden, **T**omacco, Tabak (auch **N**icotinia) oder **G**etreide angepflanzt werden.

Um den Anbau genau zu planen, benutzt der Farmer Aussagensymbole $G_{i,j}, N_{i,j}, P_{i,j}$ und $T_{i,j}$ mit $i,j \in \{1,2,\ldots,20\}$. Hierzu beschreibt $N_{7,11}$, dass der Farmer auf Parzelle $\langle 7,11\rangle$ Tabak (Nicotinia) angebaut. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

(a) Tomacco gedeiht auf einer Parzelle nur, wenn diese auch mit Plutonium kontaminiert ist. Geben Sie eine Formel φ_1 an, die repräsentiert, dass auf jeder Parzelle, in der Tomacco gepflanzt wird auch Plutonium verteilt werden muss.

(b) Sei

$$\varphi_2 \;:=\; \bigwedge_{i,j\in\{1,\ldots,20\}} (G_{i,j} \vee N_{i,j} \vee T_{i,j} \vee P_{i,j})$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Das Getreide wird schlecht, wenn es direkt neben einer radioaktiven Parzelle gedeihen muss. Geben Sie eine Formel φ_3 an, die repräsentiert, dass jede Getreideparzelle nicht mit einer mit Plutonium kontaminierten Parzelle benachbart sein darf.

[1] Bekannt aus der Serie “Die Simpsons” (Folge: Duell bei Sonnenaufgang)

(d) Der Farmer möchte die Parzellen seiner Nachbarn nicht unnötig verseuchen. Daher darf auf keiner Parzelle am Rand Plutonium verteilt werden. Geben Sie eine Formel φ_4 an, die besagt, dass auf jeder Parzelle, die am Rand liegt, kein Plutonium verteilt werden darf.

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist *durch 3 teilbar*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 3 \cdot m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \; := \; \begin{cases} (A_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}), & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist} \\ ((A_n \leftrightarrow A_{n+1}) \leftrightarrow A_{n+2}), & \text{falls } n \text{ nicht durch 3 teilbar ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$.

Es ist also beispw. $\varphi_1 = ((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)$, $\varphi_2 = ((A_2 \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_4 = ((A_4 \leftrightarrow A_5) \leftrightarrow A_6)$, $\varphi_5 = ((A_5 \leftrightarrow A_6) \leftrightarrow A_7)$ und $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_7)$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und erklären Sie, warum $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

(b) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \;\equiv\; \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Beweisen Sie, dass für alle $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und alle $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Phi \models (\varphi \to \psi)$$

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 2 aus "Learn Prolog Now!".

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

(i) `butch` und `killer`

(ii) `gut(X, sahne)` und `gut(pizza, Y)`

(iii) `datei` und `'datei'`

(iv) `Datei` und `'Datei'`

(v) `lecker(brot)` und `brot`

(vi) `f(X, Y, a)` und `f(b, X, Y)`

(vii) `and(not(X), and(X, X))` und `and(not(p), Y)`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe **4(b)** von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- kills(marsellus, X).
```