Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik

17. Juni 2020

Logik in der Informatik
Take-Home-Klausur vom 17. Juni 2020
(Modulabschlussprüfung)

Name: Schweikardt Vorname: Nicole

Matrikelnummer: 012345

Punkte:

Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt
maximale Punkte	31	24	23	22	100
erreichte Punkte					

Note:

Der Ablauf der Take-Home-Klausur ist wie folgt:

- **09:30–10:00 Uhr:** Einlass zur Klausur, also zum entsprechenden Moodle-Kurs. Wenn Sie in diesem Moodle-Kurs Zugriff auf die hier vorliegende pdf-Datei haben, haben Sie im Moodle-Kurs bereits

  1. die bei Klausuren übliche Gesundheitsabfrage **„Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, heute diese Modulabschlussprüfung abzulegen?“** mit **„ja“** beantwortet,
  2. die Einverständniserklärung **„Sind Sie damit einverstanden, die Modulabschlussprüfung in „Logik in der Informatik“ heute in Form einer Take-Home-Klausur abzulegen?“** mit **„ja“** beantwortet und
  3. die Selbständigkeitserklärung **„Ich erkläre hiermit, dass ich die Take-Home-Klausur selbstständig und ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung von nicht-zugelassenen Hilfsmitteln bearbeite. Mir ist bekannt, dass gemäß der Prüfungsordnung bzw. der Fächerübergreifenden Satzung zur Regelung von Zulassung, Studium und Prüfung der Humboldt-Universität zu Berlin (ZSP-HU) bei Verstößen ein Verfahren gegen mich wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.“** mit **„ja“** unterzeichnet.

- **10:00–12:00 Uhr:** Bearbeitungszeitraum der Klausur. Jede*r Teilnehmer*in bearbeitet seine/ihre Klausuraufgaben persönlich, alleine und **handschriftlich** auf eigenem Papier und mit einem dokumentenechten Schreibstift. **Jede Seite, die als Lösung eingereicht wird, muss in der ersten Zeile mit folgenden Daten markiert sein: Name, Vorname, Matrikelnummer, Unterschrift und einer Seitenzahl.** Achten Sie darauf, dass jeweils auch klar hervorgeht, auf welche Klausuraufgaben sich Ihre Lösungen beziehen. Weitere Detailregelungen dazu, wie Lösungen angefertigt werden müssen, finden sich weiter unten im Punkt „Generelle Regelungen“.

- **12:00–12:30 Uhr:** Digitalisierung und Einreichung der Klausurlösungen. Die Teilnehmer*innen digitalisieren ihre Lösungen und laden diese über Moodle hoch. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

  1. Beschriften Sie jede Seite Ihrer Lösung mit Name, Vorname, Matrikelnummer, Unterschrift und einer Seitenzahl. Achten Sie darauf, dass jeweils auch klar hervorgeht, auf welche Klausuraufgaben sich Ihre Lösungen beziehen.
  2. Digitalisieren Sie die Blätter, indem Sie sie abfotografieren (auf ausreichend Beleuchtung achten, eine A4-Seite pro Aufnahme) oder einscannen. Es können max. 20 Dateien zu je max. 10 MB als Bilddatei, PDF oder Zip-Datei bei Moodle hochgeladen werden.
  3. Laden Sie Ihre Dateien über die Moodle-Webseite oder über die Moodle-App hoch. In der App klicken Sie auf „SICHERN“, um die Dateien hochzuladen. Alle hochgeladenen und gesicherten Dateien gelten als abgegeben. Sie können bis zur Abgabedeadline um 12:30 Uhr die hochgeladenen Dateien noch ändern und ergänzen. Bitte beachten Sie, dass Sie selbst verantwortlich sind für die Qualität der Aufnahmen und das vollständige und fristgemäße Hochladen der Dateien. Die vom CMS-Moodle-Support bereit gestellte Anleitung zum Hochladen der abfotografierten Klausur liefert Ihnen hierzu hilfreiche Informationen (siehe `https://hu.berlin/Upload-Moodle-App`).

  Die Deadline dafür ist 12:30 Uhr, und dies ist eine „harte“ Deadline: Lösungen die bis dahin nicht bei Moodle hochgeladen und offiziell abgegeben sind, werden nicht bewertet. **Bei technischen Problemen müssen unverzüglich die Prüfer kontaktiert werden**; Details dazu finden sich im nächsten Punkt „Support während der Klausur“.

Support während der Klausur:

Für die Teilnehmer*innen gibt es folgende Möglichkeiten, während der Klausur Kontakt zu den Prüfern aufzunehmen oder technischen Support zum Umgang mit Moodle zu erhalten:

- Sollten während der Klausur inhaltliche Fragen auftauchen (beispielsweise vermutete Fehler oder Unklarheiten in der Aufgabenstellung), können Sie

  1. sich über **das private Forum namens „Verständnisfragen“ in dem Moodle-Kurs** an uns wenden;
  2. falls Ihnen dies aus technischen Gründen nicht möglich sein sollte, können Sie **den Warteraum des für die Klausur in Moodle eingerichteten Zoom-Meetings betreten**; wir werden die Leute einzeln und nacheinander in der Reihenfolge ins Meeting eintreten lassen, in der sie den Warteraum betreten haben;
  3. falls Ihnen auch dies aus technischen Gründen nicht möglich sein sollte, können Sie **telefonisch über 030 / 2093 3044 direkt Kontakt zu Prof. Dr. Nicole Schweikardt aufnehmen**.

  Beachten Sie aber, dass wir Ihnen, wie bei einer Präsenzklausur auch, keine weitergehenden Erläuterungen oder Tipps zur Lösung geben werden.

- Bei technischen Problemen im Umgang mit Moodle oder dem Zugang zur Klausur steht Ihnen **im Notfall Frau Berger vom Moodle-Support des CMS unter der Telefonnummer 030 / 2093 70027** zur Verfügung.

- Im Fall von anderen gravierenden Störungen wie Strom- oder Internetausfall wenden Sie sich per Telefon unter 030 / 2093 3044 direkt an Prof. Dr. Nicole Schweikardt.

Generelle Regelungen:

- Sie brauchen eigenes Papier und einem dokumentenechten blau oder schwarz schreibenden Schreibstift.
- **Lösungen müssen persönlich, alleine und handschriftlich angefertigt sein** — sonst werden sie nicht bewertet.
- Als Hilfsmittel sind alle Materialien erlaubt, die in der Vorlesung und Übung „Logik in der Informatik“ zur Verfügung gestellt wurden (Skript, Übungsaufgaben, eigene Notizen). Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- **Jede*r Klausurteilnehmer*in muss seine/ihre Klausur selbständig und alleine lösen und darf während der Klausur keinen Kontakt zu anderen Personen haben. Zuwiderhandlungen gelten als Täuschungsversuch bzw. Täuschung.**
- **Jede Seite, die als Lösung eingereicht wird, muss in der ersten Zeile mit folgenden Daten markiert sein: Name, Vorname, Matrikelnummer, Unterschrift und einer Seitenzahl**; andernfalls werden diese Seiten nicht gewertet. Achten Sie darauf, dass jeweils auch klar hervorgeht, auf welche Klausuraufgaben sich Ihre Lösungen beziehen.
- Begründungen sind nur dann nötig, wenn die Aufgabenstellung dies verlangt.
- **Benutzen Sie einen blau oder schwarz schreibenden dokumentenechten Stift**; alle mit einem anderen Stift angefertigten Lösungen werden nicht gewertet.
- **Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst.** Entscheiden Sie sich also immer für eine Lösung.
- In der Klausur können maximal 100 Punkte erreicht werden. Werden insgesamt 40 oder mehr Punkte erreicht, so ist die Prüfung bestanden.

Bitte beachten Sie den folgenden Auszug aus der ZSP-HU, §111 und §112.

§111 (1) „[...] Wer bei der Ablegung einer Prüfung täuscht oder zu täuschen versucht, hat die Prüfung nicht bestanden. Wird die Täuschung erst bekannt, nachdem die Erbringung der Studienleistung oder das Bestehen der Prüfung bestätigt ist, wird die Bestätigung aufgehoben und eingezogen. Die Leistungspunkte werden entzogen.“

§111 (2) „Eine Täuschung oder ein Täuschungsversuch liegt insbesondere vor, wenn [...] nicht zugelassene Hilfsmittel verwendet werden. [...]“

§111 (3) „Bei wiederholter Täuschung oder wiederholtem Täuschungsversuch kann die Studentin oder der Student von der Wiederholung der betroffenen Studienleistung oder Prüfung ausgeschlossen werden. [...]“

§111 (5) „Wird eine Täuschung erst bekannt, nachdem die Abschlussdokumente nach § 115 erteilt sind, kann der akademische Grad nach Maßgabe der landesrechtlichen Regelungen entzogen werden.“

§112 (1) „[...] Wer bei der Ablegung einer Prüfung stört oder zu stören versucht, hat die Prüfung nicht bestanden. Wird die Störung erst bekannt, nachdem die Erbringung der Studienleistung oder das Bestehen der Prüfung bestätigt ist, wird die Bestätigung aufgehoben. Die Leistungspunkte werden entzogen. [...]“

§112 (2) „Eine Störung oder ein Störungsversuch liegt insbesondere vor, wenn Hilfe zu einer Täuschung oder einem Täuschungsversuch geleistet wird oder andere Studentinnen und Studenten trotz Ermahnung bei der Erbringung der Studienleistung oder Ablegung der Prüfung beeinträchtigt werden.“

§112 (3) „§ 111 Absatz 3 bis 5 gelten entsprechend.“

Aufgabe 1: **(31 Punkte)**

(a) Ein Sushi-Restaurant möchte eine neues Maki-Set anbieten. Potentielle Kandidaten für dieses Set sind **A**vocado-Maki, **C**alifornia-Maki, **L**achs-Maki und **T**hunfisch-Maki. Um herauszufinden, welche Kombination bei den Stammkund*innen beliebt zu sein scheint, macht der Betreiber eine Umfrage und kommt zu folgendem Ergebnis: (7 Pkte)

Fakt 1: California-Maki soll genau dann dabei sein, wenn es auch Lachs-Maki gibt.
Fakt 2: Avocado-Maki soll auf jeden Fall dabei sein.
Fakt 3: Wenn es California-Maki geben soll, dann soll es auch Thunfisch-Maki geben.
Fakt 4: Es sollen mindestens drei der obigen Maki-Sorten im Set enthalten sein.

(i) Formalisieren Sie jeden der vier Fakten $1, \ldots, 4$ durch je eine aussagenlogische Formel $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, indem Sie die atomaren Aussagen
A - **A**vocado-Maki ist im Set enthalten.
C - **C**alifornia-Maki ist im Set enthalten.
L - **L**achs-Maki ist im Set enthalten.
T - **T**hunfisch-Maki ist im Set enthalten.
benutzen.

(ii) Geben Sie alle Möglichkeiten an, wie der Betreiber das Set gestalten kann, sodass alle 4 Fakten aus der Umfrage realisiert werden. Zeigen Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist.

(b) Geben Sie eine zu (3 Pkte)

$$\varphi \ := \ (\neg A_4 \vee (A_6 \leftrightarrow A_8))$$

äquivalente Formel φ_{KNF} in konjunktiver Normalform an. Geben Sie Ihren Lösungsweg an!

(c) (i) Ist die folgende Aussage korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

„Für alle $\psi \in \mathsf{AL}$ gilt: wenn $\neg\psi$ nicht unerfüllbar ist, dann ist ψ erfüllbar.“

(ii) Ist die folgende Aussage korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

„Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und alle $\psi \in \mathsf{AL}$ gilt: Wenn alle $\varphi \in \Phi$ allgemeingültig sind, so folgt ψ aus Φ.“

(d) Geben Sie für jede der folgenden Klauselmengen jeweils eine erfüllende Interpretation oder eine Resolutionswiderlegung an. (6 Pkte)

$$\Gamma_1 \ := \ \{\ \{X, O, \neg N\}\ ,\ \{X, \neg O\}\ ,\ \{N, \neg Z\}\ ,\ \{X, O\}\ ,\ \{Z\}\ ,\ \{\neg X, \neg Z\}\ \}$$

$$\Gamma_2 \ := \ \{\ \{F, H\}\ ,\ \{\neg F, \neg E\}\ ,\ \{F, \neg L\}\ ,\ \{K, H\}\ ,\ \{F, \neg H\}\ ,\ \{\neg K, E\}\ ,\ \{\neg F, H, E\}\ \}$$

(e) Betrachten Sie folgende Klauselmenge Γ: (6 Pkte)

$$\Gamma \ := \ \{\ \{H, \neg F\},\ \{F, \neg E\},\ \{\neg L, \neg K, \neg H\},\ \{E\},\ \{L, \neg K, \neg E, \neg F\},\ \{K, \neg E, \neg H\}\ \}$$

(i) Geben Sie eine zur Klauselmenge Γ passende Hornformel $\varphi \in \mathsf{AL}$ an.

(ii) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf die Klauselmenge Γ an. Kennzeichnen Sie einzelne Schleifendurchläufe. Geben Sie für jeden Schleifendurchlauf des Algorithmus die in diesem Durchlauf gewählte Tatsachenklausel und die am Ende des Durchlaufs aktuelle Klauselmenge an. Was ist die Ausgabe des Streichungsalgorithmus am Ende?

(f) Für zwei aussagenlogische Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ schreiben wir $\mathcal{I}_1 \preceq \mathcal{I}_2$, wenn für alle $X \in \mathsf{AS}$ gilt: $\mathcal{I}_1(X) \leq \mathcal{I}_2(X)$. Eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ heißt *monoton*, wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ mit $\mathcal{I}_1 \preceq \mathcal{I}_2$ gilt: (5 Pkte)

$$\text{Wenn } \ \mathcal{I}_1 \models \varphi, \ \text{ dann } \ \mathcal{I}_2 \models \varphi.$$

(i) Geben Sie je ein Beispiel für eine monotone und für eine nicht monotone Formel an.

(ii) Beweisen Sie, dass alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \vee\})$ monoton sind.

Aufgabe 2: **(24 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{T, g\}$ die Signatur mit dem 3-stelligen Relationssymbol T und dem 1-stelligen Funktionssymbol g. Geben Sie für dieses σ in einer präzisen Definition an, was eine *σ-Struktur* ist und was eine *σ-Interpretation* ist. (4 Pkte)

(b) Eine Fitnessstudio-Kette nutzt eine Datenbank $\mathcal{D}$, bestehend aus den beiden Tabellen $\mathsf{Trainiert}^{\mathcal{D}}$ und $\mathsf{Verfügbar}^{\mathcal{D}}$. Konkret sieht die Datenbank $\mathcal{D}$ wie folgt aus:

$\mathsf{Trainiert}^{\mathcal{D}}$:

Gerät	**Körperregion**
Abduktionsmaschine	Beine
Seithebemaschine	Schultern
Latzugmaschine	Arme
Ruderzug	Rücken
Butterfly	Brust
Trizepsmaschine	Arme
Latzugmaschine	Rücken
Bauchmaschine	Bauch
Bizepsmaschine	Arme

$\mathsf{Verfügbar}^{\mathcal{D}}$:

Gerät	**Filiale**
Trizepsmaschine	Pankow
Bauchmaschine	Pankow
Latzugmaschine	Mitte
Ruderzug	Pankow
Latzugmaschine	Pankow
Bauchmaschine	Mitte
Abduktionsmaschine	Pankow
Butterfly	Pankow
Bizepsmaschine	Pankow
Ruderzug	Mitte
Butterfly	Mitte
Seithebemaschine	Pankow
Seithebemaschine	Mitte
Abduktionsmaschine	Mitte

Hierbei enthält die Tabelle $\mathsf{Trainiert}^{\mathcal{D}}$ Informationen dazu, welche Fitnessgeräte welche Körperregionen trainieren. Die Tabelle $\mathsf{Verfügbar}^{\mathcal{D}}$ beschreibt, welche Geräte in welcher Filiale vorhanden sind. Die Signatur σ_{Fitness} besteht aus dem 2-stelligen Relationssymbol $\mathsf{Trainiert}$ und dem 2-stelligen Relationssymbol $\mathsf{Verfügbar}$, sowie je einem Konstantensymbol 'c' für jeden möglichen Eintrag $c \in \mathtt{ASCII}^*$.

(i) Geben Sie eine $\mathsf{FO}[\sigma_{\text{Fitness}}]$-Formel $\varphi_1(x)$ an, die, ausgewertet auf einer als σ_{Fitness}-Struktur repräsentierten Datenbank, alle in der Datenbank enthaltenen Geräte ausgibt, die in Mitte sind und Arme oder Rücken trainieren. Geben Sie auch das Ergebnis Ihrer Formel $\varphi_1(x)$ auf der konkreten Datenbank $\mathcal{D}$ an, d.h. geben Sie die Menge $[\![\varphi_1(x)]\!]^{\mathcal{D}}$ an. (3 Pkte)

(ii) Geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die folgende Formel $\varphi_2(z)$ beschrieben wird: (3 Pkte)

$$\varphi_2(z) \quad := \quad \exists x \big(\mathsf{Trainiert}(z, x) \land \forall y\, (\mathsf{Trainiert}(z, y) \to y{=}x)\, \big)$$

(c) Sei $\sigma := \{S, R\}$ die Signatur mit dem 1-stelligen Relationssymbol S und dem 1-stelligen Relationssymbol R. Geben Sie zu jeder der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln ψ_1 und ψ_2 an, ob diese in Negationsnormalform, Pränex-Normalform und/oder Skolemform ist. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. (3 Pkte)

$$\psi_1 \quad := \quad \forall x \forall y \forall z\, \big((\neg S(x) \lor R(y)) \land (\neg\, x{=}z \land R(z))\big)$$
$$\psi_2 \quad := \quad \forall x\, \big(\neg S(x) \land \forall y(\neg R(y) \lor \neg S(x))\, \big)$$

(d) Sei $\sigma := \{E\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol E. Geben Sie für die Formel (5 Pkte)

$$\varphi(z,x) \quad := \quad \Big(\forall y\ (E(y,z)\ \land\ E(y,x)) \quad \land \\ \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \left(((\neg\, x_1{=}x_2\ \land\ \neg\, x_1{=}x_3)\ \land\ \neg\, x_2{=}x_3) \quad \land \\ \forall u\, ((u{=}x_1 \lor u{=}x_2) \lor u{=}x_3)\ \right) \Big)$$

eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ und zwei Belegungen β_1 und β_2 in $\mathcal{A}$ an, so dass für die σ-Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}, \beta_2)$ gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$.

(e) (i) Ist die folgende Aussage für alle Signaturen σ wahr? (2 Pkte)

Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt: Wenn $\Gamma \not\models \psi$ für alle endlichen $\Gamma \subseteq \Phi$ gilt, dann gilt: $\Phi \not\models \psi$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Ist die folgende Aussage für alle Signaturen σ wahr? (2 Pkte)

Die Menge aller syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln ist eine Teilmenge der Menge aller syntaktisch korrekten Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ, d.h. $\mathsf{AL} \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Ist die folgende Aussage für alle Signaturen σ und alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln ψ und ψ' wahr? (2 Pkte)

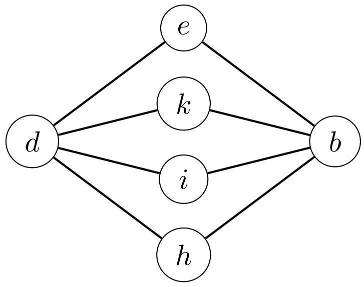
Wenn es σ-Interpretationen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ gibt mit $\mathcal{I}_1 \models \psi$ und $\mathcal{I}_2 \models \psi'$, dann gibt es eine σ-Interpretation $\mathcal{J}$ mit $\mathcal{J} \models (\psi\ \lor\ \psi')$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

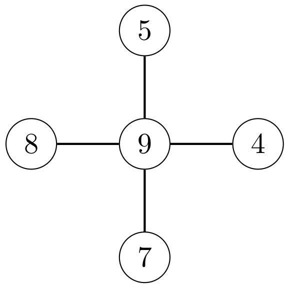
Aufgabe 3: (23 Punkte)

(a) Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. In der folgenden Darstellung der σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u):

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



(i) Geben Sie die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ an, für die Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat, und beschreiben Sie Spoilers Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Begründen Sie dabei auch, warum die von Ihnen beschriebene Strategie eine Gewinnstrategie für Spoiler ist. (4 Pkte)

(ii) Geben Sie für Ihre Zahl m aus Aufgabenteil (i) einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe m an, so dass gilt: (2 Pkte)

$$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

(iii) Begründen Sie, warum für Ihren Satz φ aus (ii) tatsächlich $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt. (2 Pkte)

(b) Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Beweisen Sie, dass es keinen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ gibt, so dass für jede endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: (5 Pkte)

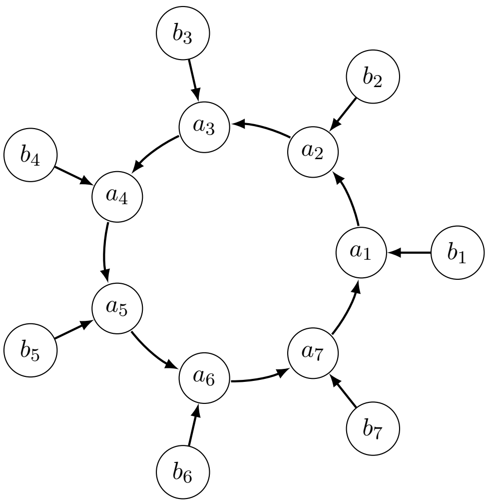
$\mathcal{A} \models \varphi \iff$ Die Anzahl der Kanten in $\mathcal{A}$ ist eine Primzahl (d.h. $|E^{\mathcal{A}}|$ ist eine natürliche Zahl $\geqslant 2$, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist).

(c) Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

Definition: Für eine σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$ sagen wir, dass $\mathcal{A}$ *eine Krone der Länge* n *besitzt*, wenn es Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ mit $|\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}| = 2n$ gibt, sodass die Relation $E^{\mathcal{A}}$ die folgenden Kanten enthält:

- (a_i, a_{i+1}) für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und (a_n, a_1) und
- (b_i, a_i) für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Eine Krone der Länge 7 sieht zum Beispiel wie folgt aus:



(i) Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ_n an, sodass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_n \iff \mathcal{A}$ enthält eine Krone der Länge n. (4 Pkte)

(ii) Geben Sie eine Menge Ψ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen an, die die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ axiomatisiert, für die gilt: Es gibt keine natürliche Zahl $n \geqslant 2$, so dass $\mathcal{A}$ eine Krone der Länge n besitzt. (1 Pkt)

(iii) Verwenden Sie den Endlichkeitssatz der Logik erster Stufe, um Folgendes zu beweisen: (5 Pkte)

Die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$, die eine Krone der Länge $\geqslant 2$ besitzen, ist *nicht* erststufig axiomatisierbar. Präzise: Zeigen Sie, dass es keine Menge Φ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \Phi \quad \iff \quad \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqslant 2 \text{, so dass } \mathcal{A} \text{ eine Krone der Länge } n \text{ besitzt.}$$

Aufgabe 4: **(22 Punkte)**

(a) In dieser Aufgabe bezeichnet AL' die Menge aller aussagenlogischen Formeln, die *keine Aussagensymbole* enthalten. Wir repräsentieren Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}'$ wie folgt durch Terme $\mathtt{t}_\varphi \in \mathsf{T}_{\mathsf{LP}}$ der Logik-Programmierung:

- *Atomare Formeln:*

$$\mathtt{t}_\mathbf{0} := \mathtt{0} \quad \text{und} \quad \mathtt{t}_\mathbf{1} := \mathtt{1}$$

- *Rekursive Regeln:* Für Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}'$ ist

$$\begin{aligned} \mathtt{t}_{\neg\varphi} &:= \mathtt{n(t}_\varphi\mathtt{)}, \\ \mathtt{t}_{(\varphi\vee\psi)} &:= \mathtt{o(t}_\varphi\mathtt{,\ t}_\psi\mathtt{)} \\ \mathtt{t}_{(\varphi\wedge\psi)} &:= \mathtt{u(t}_\varphi\mathtt{,\ t}_\psi\mathtt{)}. \end{aligned}$$

Beispielsweise wird die Formel $((\mathbf{1} \wedge \mathbf{0}) \vee \neg\mathbf{0})$ durch den folgenden Term repräsentiert:

`o(u(1, 0), n(0))`

Betrachten Sie das folgende Logik-Programm Π:

```
true(1).
false(0).
true(n(F))      :- false(F).
false(n(F))     :- true(F).
true(o(F, G))    :- true(F).
true(o(F, G))    :- true(G).
false(o(F, G))   :- false(F), false(G).
true(u(F, G))   :- true(F), true(G).
false(u(F, G)) :- false(F).
false(u(F, G)) :- false(G).
```

(i) Geben Sie einen Beweisbaum für den Term (3 Pkte)

`true(o(u(1, 0), n(0)))`

aus Π an.

(ii) Ist der folgende Term aus Π ableitbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

`false(n(u(1,0)))`

(iii) Geben Sie die Bedeutung $\mathcal{B}(\Pi)$ von Π an. (3 Pkte)

(iv) Schreiben Sie ein Logik-Programm Π′, so dass gilt: (4 Pkte)

$$\mathcal{B}(\Pi') \quad = \quad \{\, \mathtt{dual(t}_\varphi\mathtt{,\ t}_{\tilde{\varphi}}\mathtt{)} : \ \varphi \in \mathsf{AL}' \,\}.$$

Erinnerung: Für eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}'$ ist $\tilde{\varphi}$ die zu φ *duale Formel*, die aus φ entsteht, indem man überall $\mathbf{0}$ durch $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ durch $\mathbf{0}$, $\wedge$ durch $\vee$ und $\vee$ durch $\wedge$ ersetzt.

(b) Sei $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol, R ein 2-stelliges Relationssymbol und f_0 und f_1 jeweils 1-stellige Funktionssymbole sind.

(i) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. (3 Pkte)

(1) Das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist entscheidbar.

(2) Das Allgemeingültigkeitsproblem für AL ist entscheidbar.

(3) Das Unerfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ ist semi-entscheidbar.

(ii) Betrachten Sie das folgende Problem: (4 Pkte)

Äquivalenzproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$
Eingabe: Zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ, ψ.
Frage: Sind φ und ψ äquivalent?

Ist das Äquivalenzproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ entscheidbar? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Sei $\sigma = \{f, c\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Funktionssymbol f und dem Konstantensymbol c besteht. Geben Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über der Menge $M := {A_{\sigma\text{-Terme}}}^*$ an, für den gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{T}_\sigma$. D.h.: Die Menge der in $\mathfrak{K}$ aus $\varnothing$ ableitbaren Elemente soll genau die Menge aller σ-Terme sein. (3 Pkte)